TMMOB Harita ve Kadastro Mühendisleri Odası
12. Türkiye Harita Bilimsel ve Teknik Kurultayı
11-15 Mayıs 2009, Ankara

UYUŞUMSUZ ÖLÇÜ ANALİZİNDE ROBUST KESTİRİM VE L1-NORM YÖNTEMLERİ

Y. Şişman[1], S. Bektaş[1], Ö. Yıldırım[2]
[1]Ondokuz Mayıs Üniversitesi Müh. Fak. Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliği, Samsun. ysisman@omu.edu.tr, sbektas@omu.edu.tr
[2]Tapu ve Kadastro Genel Müdürlüğü, Geodesy ve Fotogrametri Dairesi, Ankara, omeryildirim2002@mynet.com

ÖZET

Uygulamalı bilimlerde çözüm için kullanılan ölçü grubunda uyuşumlu ve uyuşumsuz ölçüleri bir arada bulunur. Gerçeğe en yakın çözümü bulmak için yapılan dengeleme hesabı ile aynı zamanda ölçüler de uyuşumlu ve uyuşumsuz olarak ayrılabilmelidir. Ölçü grubundaki uyuşumsuz ölçüleri belirlemek için çeşitli yöntemler kullanılmaktadır. Geleneksel çözüm yöntemlerinin uyuşumsuz ölçüleri belirlemekte bazı dezavantajları vardır. Bu dezavantajlar her adımda birden fazla uyuşumsuz ölçüyü belirleyememesi, ölçü hatalarını diğer ölçülerin düzeltmelerine yayması ve uyuşumsuz olarak belirlenen ölçüyü ölçü grubundan çıkarmasıdır. Geleneksel çözüm yönteminin bu dezavantajları, uyuşumsuz ölçü gruplarının belirlenmesi için başka yöntemler arayışını ortaya çıkarmıştır. Robust kestirim yöntemi ölçü ağırlıklarını değiştirerek ölçü hatalarından daha az etkilenen bir çözüm yöntemi sunmaktadır. Robust kestirim yöntemi de En Küçük Kareler yöntemine göre iteratif çözümde ölçü ağırlıklarını yeniden belirler. Ölçü ağırlıklarının yeniden belirlenmesinde birkaç farklı kestirim yöntemi kullanılmaktadır. En Küçük Mutlak Toplam yöntemi (L1-norm) de ölçü ağırlıklarının kestiriminde kullanılabilir.

Bu çalışmada uyuşumsuz ölçüler analizinde robust kestirim yöntemlerinin kullanılması gerekçeleri belirtilerek L1-norm yöntemi ile ölçülerin ağırlılarının yeniden belirlenmesi açıklanmıştır. 20 bazlı bir GPS ağının gerçek verileri kullanılarak bir uygulama yapılmış ve yöntemler karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler :*Jeodezik Ağlar, Hata Analizi, Robust Kestirim, L1-norm*

ABSTRACT

ROBUST ESTIMATION AND L1-NORM METHODS FOR OUTLIER DETECTION

There are both consistent and outlier in measurement group used for solution in application sciences. The adjustment calculus, is made to obtained the nearest solution for real, is detached measurements as consultant or outlier. Conventional solution methods used in determining of outlier measurement groups have some negative characteristics, such as, these methods are failed in determining of more than one outlier measurement, distribute a measurement's error to the other measurements' corrections and eliminate the measurement determined as outlier from measurement group. Therefore, different solution ways for determining outlier measurement groups have been required. Another method is the robust estimation method, which is considered to be less susceptible to the measurement errors by changed measurements weight. The weight of measurements determined iteratively as the solution of Least Mean Square methods for robust estimation methods. There are several estimation functions for determined measurements weight. a Least Absolute Deviations (L1-norm) is used for re-weighted measurements.

In this study, after the reasons, used robust estimation methods for outlier detection, have been introduced, an explanation has been made with L1-Norm method for re-weighted measurement. Then, an application is made a real-work case, a GPS network with 20 baselines and to be compared of these methods has been done.

Keywords: *Geodetic Networks, Detection of Error, Robust Estimation, L1-norm*

1. GİRİŞ

Mühendislik çalışmalarında ölçülerin ve ölçülerden elde edilen sonuçların doğruluğunu artırmak ve güvenirliğini sağlamak için gerekli ölçüden fazla sayıda ölçü yapmak temel ilkedir. Gereğinden fazla yapılan ölçülerden tek anlamlı sonuç elde etmek için bu ölçüler bir amaç fonksiyonuna göre değerlendirilerek dengeleme hesabı yapılır. Seçilen amaç fonksiyonu genelde Gauss'un En Küçük Kareler Yöntemi (EKKY) dir. EKKY diğer kestirim yöntemlerine göre daha basit, karmaşık istatiksel bilgi gerektirmeyen bir yöntem ve sadece ölçülerin ortalaması ile varyans-kovaryansları gerekli olduğu için uygulamalarda yaygın olarak kullanılma imkanı bulmuştur (Ayan, 1992; Dilaver, 1996)
Çeşitli şekillerde elde edilen jeodezik ölçüler; kaba, sistematik ve rasgele olarak sınıflandırılabilen hatalarla yüklüdürler. Kaba ve sistematik hatalar ölçü grubundan çeşitli şekilde kısmen ya da tamamen arındırılabilirler fakat ölçü grubundaki rasgele hatalarına yakın büyüklükteki kaba ve sistematik hataların belirlenmesi ve ölçü grubundan arındırılması çok güçtür. Fakat bu hatalar için; ölçü sayısı sonsuz olunca, pozitif olanlarının sayısı negatif olanlarına eşit olması, normal dağılıma uymaları ve küçük değerli olanların sayıları büyük değerli olanların sayılarından çok olduğu için ölçülerin dağılımını büyük bir oranda etkilemezler. Kaba ve sistematik hatalardan rasgele hata büyüklüğünde olan hatalar ise tek yanlı hatalar oldukları için bu hataları içeren ölçüler ölçü grubundaki bütünlüğü bozar ve

uyuşumsuzluklar ortaya çıkmasına neden olur. Ölçü kümesinin dağılımdan farklı bir dağılımda olan ölçüler uyuşumsuz ölçü olarak adlandırılır (Hekimoğlu, 1995).
Dengelemenin matematik modeli ölçülerle bilinmeyenler arasındaki ilişkiyi yansıtacak şekilde fonksiyonel ve stokastik modelden oluşur. Doğrusallaştırılan fonksiyonel modelde gerekli düzeltme denklemleri yazılırsa,

$$\underline{v} = \underline{A}\underline{x} - \underline{\lambda} \;\; ; \;\; \underline{x} = \left(\underline{A}^T \underline{Q}_{\lambda\lambda}^{-1} \underline{A}\right)^{-1} \underline{A}^T \underline{Q}_{\lambda\lambda}^{-1} \underline{\lambda} \qquad (1)$$

eşitlikleri elde edilir. $\underline{v}$ düzeltmeleri ölçünün rastlantı hataları yanında fonksiyonel modele bağlı olarak diğer ölçülerin hatalarıyla oluşur ve gerçek ile farkları gösterir. Bu anlamda $\underline{v}$ vektörüne ölçü düzeltmeleri yerine dengeleme artıkları (residual) denir. $\underline{v}$ vektörü özel test yöntemleriyle analiz edilerek ölçüler hakkında bilgiler alınabilir ve uyuşumsuz ölçüler belirlenebilir.

2. MODEL HATALARI VE GLOBAL MODEL HİPOTEZİNİN TESTİ

Yapılan dengeleme hesabının geçerliliği matematik modelin tam ve doğru olarak gerçekleşmesine bağlıdır. Fonksiyonel ve stokastik modelin, ölçülerle bilinmeyenler arasındaki geometrik ilişkilere ve fiziksel gerçeklere uygun olup olmadıkları, gözlemler arasındaki duyarlık ilişkilerini tam olarak yansıtıp yansıtmadıkları model hipotezinin testi ile denetlenir (Erenoğlu, 2003). Bu nedenle her dengeleme işleminden sonra model hipotezi testi yapılır ve varsa model hataları giderilerek dengeleme işlemi yenilenir. Model hipotezinin testi için, aynı koşullarda yapılan benzer türde ölçülerin değerlendirilmesi sonucunda dengelemeden önce elde edilen ve gözlemlerin ağırlıklarının belirlenmesinde kullanılan birim ölçünün karesel ortalama hatasının öncül değeri σ_0 ve dengeleme hesabı sonucunda hesaplanan birim ölçünün karesel ortalama hatası m_0 kullanılır. Bu iki değer, kuramsal standart sapma σ'nın uygulamada elde edilen değerleridir. Uygulamada Global Test olarak da adlandırılan model hipotezinin testi için dengeleme öncesi varyans σ_0^2 ile dengeleme sonrası bulunan varyans m_0^2 karşılaştırılır. Model hipotezinin testi için hipotez olarak matematiksel modelin geometrik ve fiziksel ilişkileri ve ölçülerin stokastik özelliklerini doğru ve noksansız bir biçimde tanımladığı ileri sürülür ve

$$H_0 : E\{\sigma_0^2\} = E\{m_0^2\} = \sigma^2 \qquad ; \qquad H_S : E\{\sigma_0^2\} \neq E\{m_0^2\} \neq \sigma^2 \qquad (2)$$

şeklinde sıfır ve seçenek hipotezi kurulur. H_0 hipotezinin geçerliliğinin tespiti için ilgili dağılımdan hesaplanan sınır değerlerle karşılaştırmak için T test büyüklüğü hesaplanır.

$$T = \frac{m_0^2}{\sigma_0^2} ; \; q = F_{f,\bar{f},1-\alpha} \qquad (3)$$

Test büyüklüğü, dengeleme sonrası ve öncesi serbestlik dereceleri f, $\bar{f}$ ile tablodan alınan q değeri ile karşılaştırılarak,

- T ≤ q durumunda dengeleme için kurulan matematik model, ölçülerle bilinmeyenler arasındaki geometrik ve fiziksel ilişkileri ve ölçülerin duyarlıkları ile aralarındaki korelasyonu yeterince sağlamaktadır.
- T > q durumunda dengeleme için kurulan matematik model geçerli değildir. Matematik modelin geçersizliğine, ölçülerden biri veya birkaçında kaba hata olması, ölçülerin ağırlıklarının iyi belirlenmemiş (stokastik modelin doğru kurulmamış) olması ya da ölçülerle bilinmeyenler arasındaki geometrik ve fiziksel ilişkinin iyi belirlenmemiş (fonksiyonel modelin doğru kurulmamış) olması neden olur. (Konak, 1994)

Bu durumda önce ölçülerdeki $\nabla\lambda$ sistematik hatasının varlığı anlayabilmek için fonksiyonel modelin test edilir. Fonksiyonel modelin testinde genişletilmiş model ile doğrusal hipotez testlerine göre çözüm yapılır. Fonksiyonel modelin genişletilmesiyle düzeltme değerleri küçülür fakat bilinmeyenler çoğalır. Bu durumda dengelemenin fazla ölçü sayısı yani serbestlik derecesi ve istatistik güven azalır.Bu nedenle sistematik hata olarak tahmin edilen bilinmeyenler önceden tanı dengelemeleriyle belirlenmeye çalışılır. Daha sonra indirgenmiş ölçülerle dengeleme hesabı gerçekleştirilir (Öztürk ve Şerbetçi, 1992). Fonksiyonel modelin testinden sonra stokastik model test edilir. Bu şekilde dengeleme hesabında kullanılan ölçülerde kaba hata olup olmadığını ya da ölçülerin ağırlıklarının iyi belirlenip belirlenemediği uyuşumsuz ölçüler analizi ile test edilir. Uyuşumsuz ölçüler analizinde iki yaklaşım kullanılır. Bunların ilki ölçülerin ağırlık değerlerini sabit alıp dengeleme işlemleri sonucunda en büyük düzeltmeye sahip ölçüyü ölçü planından çıkarmak ve bu işleme uyuşumsuz ölçü kalmayıncaya kadar devam etmektir. Bu yaklaşıma geleneksel çözüm denir. Uyuşumsuz ölçüler testinde ikinci yaklaşım ölçüler ve fonksiyonel model sabit tutularak ölçülerin ağırlıklarının değiştirilmesidir. Bu çözümde, ağırlık matrisi yeniden hesaplanarak dengeleme işlemleri yenilenir. Bu çözüme yeniden ağırlıklandırmalı çözüm denir (Yavuz, Coşkun ve Baykal, 2001)

3. UYUŞUMSUZ ÖLÇÜLERİN BELİRLENMESİ

Yapılan ölçülerde çeşitli hatalar sonucunda kaba veya uyuşumsuz ölçüler oluşabilir. Uyuşumsuz ölçüleri, çeşitli amaçlarla yapılan ölçüler arasında ölçü kümesinin dağılımına uymayan ölçüler olarak tanımlayabiliriz. Uyuşumsuz ölçülerin tümü kaba hatalardan kaynaklanan kötü veriler değildir, bazı durumlarda bu ölçüler veri grubu için çok önemli olabilir. Uyuşumsuz ölçüleri güvenilir ve hızlı bir şekilde belirlemedeki davranış şekli de bir sorundur. Kaba hataların sadece sıklığı ve boyutları, verilerin güvenirliği ile ilgili bilgilerden değerlendirilebilir. Model iyi kurulmuşsa ve verilerin çoğunluk eğilimi ile ilgileniliyorsa ayrıca değerlendirilme yapılmadan uyuşumsuz ölçüler direk veri grubundan çıkarılabilir fakat bu durumda bu ölçülerin içerdiği bilgilerden de vazgeçilir (Hampel,Ronchetti,Rousseeuw ve Stahel, 1986)
Uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesi için bugüne kadar birkaç yaklaşım kullanılmıştır. Uzun yıllardır jeodezik çalışmalarda çok yaygın bir şekilde kullanılan yöntem EKKY'ne dayalı geleneksel uyuşumsuz ölçü test yöntemidir. Bu yöntemin bazı dezavantajları nedeniyle son yıllarda robust kestirim yöntemi ile uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesi çalışmaları başlamıştır. EKKY yöntemi parametrik bir yöntemdir. EKKY ile geleneksel çözüm yöntemleri kolay uygulanabilirliği ve matematik modelin çözüm sonuna kadar aynı kalması nedeniyle tüm uygulamalı bilimler gibi jeodezide de yaygın olarak kullanılmaktadır. EKKY kullanılırken sadece rasgele hataları içeren ölçü grubunun normal dağılıma uyduğu kabulleri yapılmaktadır. Gerçek ölçülerden bu kabulleri sağlayan durumu elde etmek çok zordur. EKKY ile çözümde kurulan matematik model gereği; çözüm sonucunda elde edilen düzeltmeler fonksiyonel modele bağlı olarak tüm ölçülerin hatalarından etkilenirler. Bu durumda kendi ölçü hatası ile uyuşumsuz olmayan bir ölçü diğer ölçülerin hatalarından uyuşumsuz olarak görünebileceği gibi uyuşumsuz bir ölçüde uyuşumlu olarak görünebilir, (Dilaver, Konak ve Çepni , 1998).
Uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesi ve ayıklanmasında alternatif bir yöntem robust (sağlam) istatistik ve robust kestirim yöntemidir. Robust kestirim, ölçülerin dağılım fonksiyonlarındaki küçük değişimlerden ve kaba hatalardan etkilenmeyen yaklaşık parametrik bir yöntemdir. Robust istatistik ilk olarak Huber tarafından 1964'de açıklanmıştır. Daha sonra birçok araştırmacının çalışmalarıyla çeşitli yöntem ve kestiriciler geliştirilmiştir. Bu istatistik yöntemi ölçülerdeki kaba hataların varlığı ve bu kaba hataların belirlenmesi gerekliliği nedenleriyle geliştirilmiş ve kullanılmaktadır.

3.1. Geleneksel Çözüm Yöntemleri

İstatistikte parametrik modellerin kullanımı oldukça basittir. Bunun nedeni nitelik bilgileri ve oldukça az sayıda gözlemle veri grubunun tamamının yaklaşık tarifinin sağlanabilmesidir. Ayrıca parametre değerleri ile birlikte gözlenen verilerin genelleştirilmesi ve diğer gözlemlerin stokastik modelini kolayca tarif edebilmeyi ve tamamlamayı sağlar. Veri yoğunlaştırılması yada azaltılması olarak adlandırılan istatistiğin ana amaçlarından birini yerine getirir ve tüm veri grubunun tamamen tarifinde muhtemel teori metotlarının uygulanmasına izin verir (Aktaş, 1993)
Yalnızca gerçeğe bir yaklaşım olan parametrik model, normal dağılımdaki verilerin analizi için belirlenecek sınırlar hakkında bilgi verir fakat verilerin bu sınırlara ne kadar uzak olunduğu ya da tahminlerin başarısı konusunda bilgi vermez. Jeodezik çalışmalar için yapılan ölçülerin değerlendirilmesinde kaba hataların ve uyuşumsuz ölçülerin tespiti güvenirlik ve kalite açısından önemlidir. Ölçüler ne kadar dikkatli yapılırsa yapılsın uyuşumsuzluklar içermesi kaçınılmazdır. Jeodezik çalışmalarda uzun yıllardır EKKY ile çözüme dayalı Uyuşumsuz ölçüler testi kullanılmaktadır. Geleneksel çözüm yöntemlerinde uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesi işleminde her işlem adımında sadece bir uyuşumsuz (düzeltmesi en büyük) ölçü belirlenebilir. Ölçü kümesinden bu ölçü çıkarılır ve dengeleme işlemi tekrarlanır. Dengeleme hesabı sonucu ölçülerde kaba hata olup olmadığının analizi için,

$$H_0 : E\{\nabla\lambda_i\} = 0; \qquad H_S : E\{\nabla\lambda_i\} = \nabla\lambda_i \neq 0 \tag{4}$$

şeklinde sıfır ve seçenek hipotezi kurulur. Hipotez testi analizi için ölçülerin düzeltme değerleri $\underline{v}$ kullanılarak her ölçü için test değeri hesaplanır. Bu değer ölçülerin dağılımının uyduğu tablodan serbestlik derecesi $f=n-u$ 'ya göre belirlenen sınır değer ile karşılaştırılır. Sınır değerin üstünde test değerleri varsa bu değerlerin en büyüğüne sahip olan ölçü uyuşumsuz olarak kabul edilir ve ölçü grubundan çıkarılır. Yeni ölçü grubu ile dengeleme hesabı ve uyuşumsuz ölçü analizi işlemleri tekrarlanır. Bu işleme test değerlerinin tümü sınır değerin altında kalıncaya kadar devam edilir.

Tablo 1'de; α_0 anlamlılık, f serbestlik seviyesi N, τ, t ise normal, tau ve student dağılımlarını göstermektedir. Geleneksel çözüm yöntemlerinde üç farklı yaklaşım kullanılmaktadır. Bu yaklaşımlar Data-Snooping (Baarda), Tau ve t (student) testidir. Bu yöntemlerin üçü de aynı ilkelere göre çözüm yapmaktadır, farklılıkları ise çözümde kullandıkları varyans değerleri ve bu değerlere bağlı olarak ölçülerin dağılım tablolarıdır (Öztürk ve Şerbetçi, 1992).

Tablo 1. Geleneksel Uyuşumsuz Ölçüler Analizi Yöntemleri

Yöntem	Data-Snooping	Tau-Testi	t-Testi
Test Değeri	$W_i = \dfrac{\lvert v_i \rvert}{\sigma_0 \sqrt{Q_{v_i v_i}}}$	$T_i = \dfrac{\lvert v_i \rvert}{m_0 \sqrt{Q_{v_i v_i}}}$	$t_i = \dfrac{\lvert v_i \rvert}{m_{01} \sqrt{Q_{v_i v_i}}}$
Test Dağılımı	$\sim N(0, 1)$	$\sim \tau_{f,(1-\alpha_0/2)}$	$\sim t_{f-1,(1-\alpha_0/2)}$
Sınır Değer	$N_{(1-\alpha_0/2)}$	$\tau_{f,(1-\alpha_0/2)}$	$t_{f-1,(1-\alpha_0/2)}$

3.2. Robust İstatistik ve Robust Kestirim Yöntemi

Robust istatistik, istatistik biliminde yaygın olarak kullanılan normallik, doğrusallık gibi varsayımların tahminleriyle ilgilenen bir bilim dalıdır. Ölçü grubunun normal dağılımda olduğu ve kaba ve sistematik hatalardan arındırıldığı kabulleriyle çözüm yapan EKKY'ne dayalı klasik istatistik yöntemleri, yalnızca bu yaklaşımın doğru olması durumunda anlamlı sonuç verirler. Bu modeller özellikle ölçü grubu dağılımının küçük sapmalarına karşı oldukça zayıf kalırlar (Aktaş, 1993, Hampel, Ronchetti, Rousseeuw, and Stahel, 1986).

Robust istatistik yöntemi, ideal durum varsayımlardan sapmaları ve ilişkili modellerini gösteren parametrik model istatistiğine robustluk görüşünü ekleyerek parametrik modellerden daha geniş şekilde komşuluk ilişkilerini inceleyen yaklaşık parametrik yöntemdir. Robust istatistik, istatistikte yaygın olarak kullanılan birçok dağılım modeline göre gerçeğe en yakın yaklaşım olması ve uyuşumsuz ölçülerin analizi için kullanılan diğer birçok yöntemin deneysel olması nedenleriyle, uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesinde etkili bir şekilde kullanılabilen bir yöntemdir. Robust kestirim yöntemi ile çözümde, ölçüler kendi hatalarından ve diğer ölçülerin hatalarından etkilenmemekte, ölçü hatalarının sonuçlar üzerindeki bozucu etkileri azaltılmakta, hatta yok edilmektedir.

Ölçü grubunda kaçınılmaz olan uyuşumsuz ölçüler yapılan dengeleme hesabı sonuçlarına göre yapılan istatistik testler dolaylı olarak bu hatalardan etkilenirler. Robust istatistik ilk olarak Huber tarafından 1964'de açıklanmıştır. Huber'e göre uyuşumsuz ölçüler, uyuşumlu ölçülerden ayrı dağılıma sahip olan bir ölçü grubudur ve uyuşumlu ve uyuşumsuz ölçülerin dağılım fonksiyonları, ortalamaları ve öncül varyansları birbirinden farklıdır (Huber, 1964).

3.2.1. Robust Kestirim Yöntemi İle Uyuşumsuz Ölçülerin Belirlenmesi

Robust kestirimi, EKKY'nin ağırlıklı iteratif çözümünde kullanılarak etkili sonuçlar elde edilebilir. Bu çözümde; ağırlıklı karelerin toplamının en küçük (minimum) ($v^T P v$ = min.) amaç fonksiyonu yerine, düzeltmelerin hatalardan daha az etkilenen başka bir fonksiyonu amaç fonksiyonu $\rho(\underline{v})$ olarak seçilerek bu amaç fonksiyonu en küçük yapılan çözüm aranır. Amaç fonksiyonu $\rho(\underline{v}) = \underline{v}^T \underline{P} \underline{v}$ alınırsa EKKY çözümünün elde edilir. Robust kestirimindeki amaç fonksiyonuyla elde edilen eşitlik EKKY'ne göre çözülürse robust kestirim algoritması EKKY algoritmasına indirgenerek çözüm yapılmış olur.

Robust kestiriminde; $\rho(\underline{v})$ amaç fonksiyonunun v'ye göre türevi ile $\psi(\underline{v})$ etki (kestirim) fonksiyonu; $\psi(\underline{v})$ etki fonksiyonunun v'ye göre türevi ile $W(\underline{v})$ ağırlık fonksiyonu elde edilir. Robust sonuç elde etmek için bu fonksiyonların tümünün sürekli ve sınırları belirli olmalıdır. Bu fonksiyonlardan yalnızca birinin belirlenmesi diğerlerinin belirlenmesi ve çözüm için yeterli olmaktadır. (Pilgrim, 1996; Kara, 1998; Yang, 1999).

Robust kestirim fonksiyonları için sağlamlılık denilince akla nitel sağlamlılık gelmelidir. Eğer bir kestiricinin amaç fonksiyonunun $\rho(\underline{v})$ türevi sınırlandırılmış ise o kestiriciye nitel sağlam kestirici denir. Örneğin EKK yöntemi sağlam değildir, çünkü amaç fonksiyonu kareseldir ve türevi doğrusal ve sınırsızdır. Türevi $\psi(\underline{v})$ doğrusal olmayan sınırlandırılmış bir fonksiyon seçilerek nitel sağlam bir kestirici oluşturulabilir. Böylece gözlemlerdeki uyuşumsuz ölçülerin kestirilen değerlere olan bozucu etkileri azaltılabilir (Kara, 1998). Robust kestirici fonksiyonlarından M–kestiricileri istatistiksel analizlerde kullanılmaktadır.

Ölçüleri ve bilinmeyenleri arasında doğrusal fonksiyonel bir ilişki olan ölçü grubunun olasılık fonksiyonu $F_{(\underline{x}\underline{\lambda})}$ olarak alınırsa M-kestirimi, çarpımları maksimum yapan X değerleri olarak tanımlanır ve

$$L_{(x)} = \prod_{i=1}^{n} F_{(\underline{x}\underline{\lambda})} \; ; \; LogL_{(x)} = -\sum_{i=1}^{n} Log\, F_{(\underline{x}\underline{\lambda})} = \sum_{i=1}^{n} \rho_{(\underline{x}\underline{\lambda})} \tag{5}$$

eşitliğiyle verilir. Burada toplam olasılık fonksiyonunu maksimum, amaç fonksiyonunu minimum, yapan çözüm aranır (Ata,1995; Kara, 1998). Genelleştirilmiş M-kestiricisi, EKKY ile çözümde kurulan fonksiyon dikkate alınarak (6) eşitliğine göre,

$$M=\sum_{i=1}^{n}\rho_{(\underline{x},\underline{\lambda})}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\rho(v_i)}{\partial v_i}\frac{\partial v_i}{\partial_j}=\sum_{i=1}^{n}\psi(v_i)a_{ij}=0 \tag{6}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğinin çözümünden,

$$\underline{A}^T\psi(\underline{v}) = \underline{A}^T\psi(\underline{A}\underline{x}-\underline{\lambda})=\underline{A}^T\,\underline{W}(\underline{A}\underline{x}-\underline{\lambda})=0 \tag{7}$$

eşitliği yazılabilir (Yang, 1999). (7) eşitliğinin çeşitli şekillerde çözümü yapılabilir. Uygulamada en çok kullanılan iteratif çözüm için (7) eşitliği düzenlenirse, EKKY'nin normal denklemleri gibi X bilinmeyenleri için,

$$\underline{x}=\left(\underline{A}^T\,\underline{W}\underline{A}\right)^{-1}\underline{A}^T\,\underline{W}\underline{\lambda} \tag{8}$$

çözüm yapılabilir. Bu şekilde EKKY ile iteratif ve yeniden ağırlıklandırılmalı çözüm,

$$\begin{aligned}&\underline{x}_t=\left(\underline{A}^T\,\underline{W}_t\,\underline{A}\right)^{-1}\underline{A}^T\,\underline{W}_t\underline{\lambda} \quad ; \quad \underline{v}_t=\left[\underline{A}\left(\underline{A}^T\,\underline{W}_t\,\underline{A}\right)^{-1}\underline{A}^T\,\underline{W}_t-\underline{E}\right]\underline{\lambda}\\ &\underline{W}_t=\underline{P}\underline{W}_{(t-1)} \quad t=1,2,..... \quad ; \quad \underline{W}(v_0)=\underline{E}\end{aligned} \tag{9}$$

eşitlikleriyle yapılır. Burada t iterasyon sayısı, $\underline{W}$ seçilen ağırlık fonksiyonunu göstermektedir. Başlangıç için $\underline{W}=\underline{E}$ birim matristir ve çözüm; EKKY ile yapılan çözümden sonra $\underline{v}$ düzeltme vektöründen $\underline{W}$ ağırlık matrisinin belirlenip yeniden iteratif olarak çözüm yapılması olarak özetlenebilir. Burada EKKY ile (6) eşitliğinde verilen M-kestirim koşulu sağlanarak çözüm yapılmıştır. (9) eşitliğinde yeniden ağırlıklandırılmalı EKKY kestirimi ile çözümü bulunan Robust M-kestiriminde her ölçü için uygun ağırlıklar belirlenmiş ve robust bir çözüm elde edilmiştir. Bu şekildeki EKKY algoritması robust kestirim algoritmasını oluşturmaktadır.

Bu şekilde yapılan bir çözüm sonucunda (9)'da verilen eşitliklerde uyuşumlu olan ölçülerin x_t bilinmeyenleri ve W_{t+1} ağırlıklarının değişmediği, uyuşumsuz sayılan ölçülerin W_{t+1} ağırlıklarınınsa giderek küçüldüğü ve hatta sıfıra yaklaştığı görülür. Bu durum uyuşumsuz ölçülerin bilinmeyenler üzerindeki bozucu etkileri de giderek azalmaktır. Bu robust kestirimin en önemli özelliklerinden birisidir ve özellikle uyuşumsuz olup olmadığı kararı verilemeyen ölçülerin analizinde önemlidir (Caspary and Barutta, 1987; Hekimoğlu, Ayan ve Aktaş, 1993).

3.2.2. En Küçük Mutlak Toplam Yöntemi (L1-Norm)

L_1-norm yöntemi ilk olarak astronomik konum belirleme amacıyla yapılan gözlemlerin değerlendirilmesinde Galilei tarafından 1632 yılında kullanılmıştır. EKKY'nde olduğu gibi EKMT yönteminde amaç fonksiyonu nitel sağlam değildir. Yani amaç fonksiyonunun türevi türevi doğrusal ve sınırsızdır.

L1-norm yöntemi, bazı hesaplama zorlukları ve sadece gerekli ölçüler için hata araştırması yaparken, fazla ölçüleri ihmal etmesi gibi nedenlerden dolayı EKKY kadar çok kullanılmamıştır. Ayrıca L1-norm yöntemi dengelemesinin sonuçlarının istatistiksel analizleri de son yıllara kadar yapılamamıştır. Bazı çalışmalarda, L1-norm yöntemi ile EKKY'ni birleştiren bir çözümler üretilmiştir. Bunlardan biri de robust kestirime göre yeniden ağırlık belirlenerek yapılan iteratif uyuşumsuz ölçüler analizinde yeniden ağırlık belirlenirken L_1-norm yöntemini kullanmaktır. Tüm bu çalışmalardan da anlaşılabileceği gibi L1-norm yöntemi, klasik EKKY dengelemesini tamamlayacak ek bir yöntem olarak verilmiştir. Jeodezik veri gruplarının analizinde L1-norm yöntemi, çözüm için gerekli olan koordinatların yaklaşık değerlerini belirlemek için ve EKKY çözümlerinin rank bozukluğundan dolayı karşılaşabilecek zorlukların çözülmesine ve açıklanmasına yardımcı olmak amacıyla kullanılabilir.

Aralarında doğrusal fonksiyonel bir ilişki bulunan veri grupları için L_1-norm yönteminin fonksiyonel model,

$$\|v\|=\sum_{i=1}^{n}|v_i|=\min. \tag{10}$$

şeklinde verilir. Bugüne kadar mühendislik bilimlerinde veri gruplarının analizinde bu yöntemin kullanılmamış olmasının nedeni etkin bir algoritmasının ve ilgili istatistik kuramların geliştirilmemiş olmasıdır. 1950'lı yıllarda bu yöntemin çözümü için simpleks yöntemin ve daha sonra Barrodale-Roberts (1973)'de verilen düzenlenmiş yöntemin geliştirilmesi ile bilgisayar çalışmasına uygun bir algoritma bulunmuştur. Matematiksel olarak L1-norm yöntemi $\sum|\underline{v}|=\min.$ şeklinde tanımlanır ve $\underline{v}=\underline{A}\underline{x}-\underline{\lambda}$ eşitliği ile verilen standart doğrusal programlama problemine kolayca dönüştürülebilir. Çözüm düzenlenmiş simpleks yöntem kullanılır. Bilinmeyenler için en uygun çözüm, $\underline{\lambda}_1$; $\underline{\lambda}$ ölçü vektöründen seçilmiş u adet ölçü ve $\underline{A}_1$'de bu ölçülere karşılık gelen katsayılar matrisi olmak üzere,

$$\underline{x}=\left(\underline{A}_1\right)^{-1}\underline{\lambda}_1 \tag{11}$$

eşitliğiyle yapılır. Burada. Bu durumda bilinmeyen olarak seçilen ölçülerin hata içermediği ve düzeltmelerinin sıfır olduğu varsayılır. Uyuşumsuz ölçülerin geriye kalan (n-u) adet ölçünün içerisinde bulunduğu varsayılır ve bu ölçülerin $\underline{v}_2$ düzeltmeleri, bu düzeltmelerin kovaryansı hesaplanır. Bu çözümden sonra uyuşumsuz ölçüleri belirlemek için istatistik testler yapılır (Bektaş,2005; Kara,1998). Sözü edilen simpleks algoritması çözüm için EKKY çözümünden daha çok zaman gerektirir. Oysa ki, yeniden ağırlıklandırmalı EKKY kullanılarak çok daha kolay ve az zamanda çözüm elde edilebilmektedir.

3.2.3 Robust Kestiriminde Kullanılan Kestirici Fonksiyonlar

Robust kestiriminde kullanılan birçok yöntem vardır. Tablo-2'de robust kestiriminde kullanılan yöntemlerin ağırlık fonksiyonları verilmiştir (Hekimoğlu, 1995; Kara, 1998, ,Ata, 1995; Gökalp, Güngör, Boz, 2008).

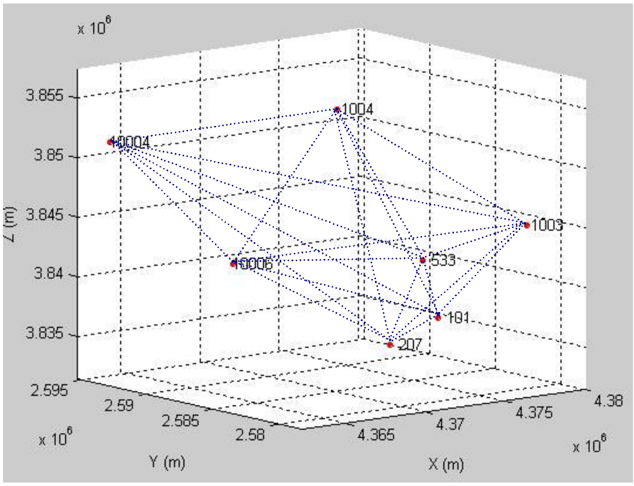
Tablo 2. Robust kestirim Yönteminde Ağırlık Fonksiyonları

Yöntem	Sınır Değer	Ağırlık Fonksiyonu
Huber	$\lvert v\rvert \le c$	1
	$\lvert v\rvert > c$	$c/\lvert v\rvert$
Andrews	$\lvert v\rvert \le c\Pi$	$\left(\lvert v\rvert/c\right)^{-1}\sin\left(\lvert v\rvert/c\right)$
	$\lvert v\rvert > c\Pi$	0
Beaton-Tukey	$\lvert v\rvert \le c$	$\left(1-\left(\lvert v\rvert/c\right)^2\right)^2$
	$\lvert v\rvert > c$	0

Yöntem	Sınır Değer	Ağırlık Fonksiyonu
Danimarka	$\lvert V\rvert \le c$	1
	$\lvert V\rvert > c$	$e^{\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)}$
Yang-II	$\lvert v\rvert \le c_0$	1
	$c_0 < \lvert v\rvert \le c_1$	$\frac{c_0}{\lvert v\rvert}$
L1-norm	Yok	$\frac{1}{\lvert v\rvert}$

4. SAYISAL UYGULAMA

Yapılan teorik açıklamaların ışığında uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesinde yöntemlerin avantaj ve dezavantajlarını belirlemek için 20 bazı ölçülmüş olan bir GPS ağının gerçek verileri kullanılarak çözüm yapılmıştır.



İlk olarak geleneksel çözüm yöntemleri için uyuşumsuz ölçüler analizi yapılmıştır. Geleneksel çözüm yöntemlerinden t-testi kullanılmıştır. Yapılan çözümde uyuşumlu ölçü grubuna 10. iterasyon adımında ulaşılmış ve 9 tane ölçü, ölçü grubundan çıkarılmıştır. (Tablo 3)

Tablo 3. Geleneksel Çözüm Yöntemleri İle Uyuşumsuz Ölçüler Analizi

İterasyon	t-Testi				
	Ölçü No		t_i	Sınır Değer	Karar
1	1004-10004	ΔZ	2.710	2.39	☹
2	533-101	ΔZ	2.568	2.39	☹
3	1003-533	ΔX	2.476	2.39	☹
4	1004-101	ΔZ	3.407	2.39	☹
5	1004-10004	ΔY	2.562	2.39	☹
6	533-101	ΔY	2.655	2.40	☹
7	10004-533	ΔX	2.793	2.40	☹
8	1004-533	ΔX	2.726	2.40	☹
9	1003-533	ΔY	2.412	2.40	☹
10	207-1006	ΔX	2.143	2.40	☺

Robust kestirim yöntemleri için uyuşumsuz ölçüler analizi yapılırken L1-norm yöntemi, Danimarka yöntemi, Yang-II yönteminin ağırlık fonksiyonları kullanılarak ölçülere yeniden ağırlık belirlenmiştir. Yapılan çözüme ölçü ağırlıklarında anlamlı bir değişiklik olmayıncaya kadar devam edilmiştir. Bu çözüme 3. iterasyonda ulaşılmıştır. (Tablo 4)

Tablo 4. Robust Kestirim Yöntemleri İle Uyuşumsuz Ölçüler Analizi

ÖLÇÜ NO		L1-norm Yöntemi				Danimarka Yöntemi				Yang-II			
İterasyon		I.	II.	III.	Karar	I.	II.	III.	Karar	I.	II.	III.	Karar
533-101	ΔX	0.217	0.211	0.207	☹	1.000	0.453	0.000	☹	0.217	0.245	0.302	😐
	ΔY	0.150	0.134	0.132	☹	0.255	0.000	0.000	☹	0.000	0.000	0.000	☹
	ΔZ	0.124	0.110	0.108	☹	0.136	1.000	0.004	☹	0.000	0.000	0.000	☹
207-10006		0.323	0.473	0.688	☺	1.000	1.000	1.000	☺	0.323	0.486	1.000	☺
		0.641	0.662	0.673	😐	1.000	0.825	1.000	☺	1.000	1.000	1.000	☺
		1.190	1.030	1.305	☺	1.000	0.917	1.000	☺	1.000	1.000	1.000	☺
207-10004	ΔX	0.204	0.182	0.167	☹	1.000	0.228	0.000	☹	0.204	0.178	0.170	😐
	ΔY	1.292	28.170	214.434	☺	1.000	1.000	1.000	☺	1.000	1.000	1.000	☺
	ΔZ	2.047	1.957	1.682	☺	1.000	1.000	1.000	☺	1.000	1.000	1.000	☺
10006-10004	ΔX	1.707	4.510	29.479	☺	1.000	1.000	1.000	☺	1.000	1.000	1.000	☺
	ΔY	1.400	39.693	109.822	☺	1.000	1.000	1.000	☺	1.000	1.000	1.000	☺
	ΔZ	0.201	0.208	0.202	☹	1.000	1.000	1.000	☺	0.201	0.225	0.248	😐
1004-10006	ΔX	0.492	0.671	0.827	☺	1.000	1.000	1.000	☺	0.492	1.000	1.000	☺
	ΔY	0.490	1.260	1.666	☺	1.000	1.000	1.000	☺	0.490	1.000	1.000	☺
	ΔZ	2.778	3.147	2.100	☺	1.000	1.000	1.000	☺	1.000	1.000	1.000	☺
1004-10004	ΔX	2.229	3.724	5.709	☺	1.000	1.000	1.000	☺	1.000	1.000	1.000	☺
	ΔY	0.146	0.114	0.111	☹	0.222	0.000	0.000	☹	0.000	0.000	0.000	☹
	ΔZ	0.110	0.101	0.101	☹	0.071	0.000	0.000	☹	0.000	0.000	0.000	☹
1003-207	ΔX	0.195	0.180	0.168	😐	1.000	0.337	0.000	☹	0.195	0.190	0.181	😐
	ΔY	0.512	0.772	0.865	☺	1.000	0.827	1.000	☺	1.000	1.000	1.000	☺
	ΔZ	0.380	0.344	0.310	😐	1.000	0.722	0.263	😐	0.380	0.324	0.343	😐
1003-10006	ΔX	0.972	2.197	4.722	☺	1.000	1.000	1.000	☺	1.000	1.000	1.000	☺
	ΔY	0.824	1.978	2.922	☺	1.000	1.000	1.000	☺	1.000	1.000	1.000	☺
	ΔZ	1.892	8.415	203.027	☺	1.000	1.000	1.000	☺	1.000	1.000	1.000	☺
1003-10004	ΔX	4.118	30.019	45.162	☺	1.000	1.000	1.000	☺	1.000	1.000	1.000	☺
	ΔY	0.654	7.647	20.538	☺	1.000	1.000	1.000	☺	1.000	1.000	1.000	☺
	ΔZ	0.329	0.303	0.283	😐	1.000	1.000	1.000	☺	0.329	0.333	0.443	😐
1003-1004	ΔX	9.459	7.396	10.277	☺	1.000	1.000	1.000	☺	1.000	1.000	1.000	☺
	ΔY	1.211	3.474	3.875	☺	1.000	1.000	1.000	☺	1.000	1.000	1.000	☺
	ΔZ	0.592	1.664	3.043	☺	1.000	1.000	1.000	☺	1.000	1.000	1.000	☺

ÖLÇÜ		L1-norm Yöntemi				Danimarka Yöntemi				Yang-II			
		I.	II.	III.	Karar	I.	II.	III.	Karar	I.	II.	III.	Karar
207-533	ΔX	0.194	0.215	0.236	😐	1.000	0.331	0.050	😐	0.194	0.271	0.368	😐
	ΔY	0.552	0.615	0.639	☺	1.000	1.000	1.000	☺	1.000	1.000	1.000	☺
	ΔZ	0.361	0.442	0.485	☺	1.000	1.000	1.000	☺	0.361	1.000	1.000	☺
207-101	ΔX	0.566	0.907	1.624	☺	1.000	1.000	1.000	☺	1.000	1.000	1.000	☺
	ΔY	0.699	1.277	1.274	☺	1.000	1.000	1.000	☺	1.000	1.000	1.000	☺
	ΔZ	2.047	11.444	19.959	☺	1.000	1.000	1.000	☺	1.000	1.000	1.000	☺
10006-533	ΔX	0.234	0.211	0.200	😐	1.000	1.000	1.000	☺	0.234	0.261	0.297	😐
	ΔY	0.412	0.376	0.364	☺	1.000	1.000	1.000	☺	0.412	0.282	0.255	😐
	ΔZ	1.591	139.310	171.204	☺	1.000	1.000	1.000	☺	1.000	1.000	1.000	☺
10006-101	ΔX	0.405	0.358	0.338	😐	1.000	1.000	1.000	☺	0.405	0.393	0.351	😐
	ΔY	0.598	0.932	0.910	☺	1.000	1.000	1.000	☺	1.000	1.000	1.000	☺
	ΔZ	0.203	0.223	0.232	😐	1.000	1.000	0.128	😐	0.203	0.257	0.289	😐
10004-533	ΔX	0.206	0.211	0.214	☹	1.000	0.124	0.000	☹	0.206	0.179	0.159	😐
	ΔY	0.271	0.362	0.376	☺	1.000	1.000	1.000	☺	0.271	1.000	1.000	☺
	ΔZ	0.538	0.728	0.797	☺	1.000	1.000	0.293	😐	1.000	1.000	1.000	☺
10004-101	ΔX	17.500	82.786	310.287	☺	1.000	1.000	1.000	☺	1.000	1.000	1.000	☺
	ΔY	7.000	19.099	94.132	☺	1.000	1.000	1.000	☺	1.000	1.000	1.000	☺
	ΔZ	0.294	0.357	0.363	😐	1.000	1.000	1.000	☺	0.294	1.000	1.000	☺
1004-533	ΔX	0.456	0.439	0.435	☹	1.000	1.000	0.209	😐	0.456	0.339	0.260	😐
	ΔY	0.483	0.947	1.055	☺	1.000	1.000	1.000	☺	0.483	1.000	1.000	☺
	ΔZ	0.218	0.305	0.321	☺	1.000	1.000	1.000	☺	0.218	0.455	1.000	☺
1004-101	ΔX	2.536	1.614	1.374	☺	1.000	1.000	1.000	☺	1.000	1.000	1.000	☺
	ΔY	0.523	15.084	9.877	☺	1.000	1.000	1.000	☺	1.000	1.000	1.000	☺
	ΔZ	0.411	0.455	0.453	☹	1.000	1.000	1.000	☺	0.411	0.490	0.462	😐
1003-533	ΔX	0.143	0.141	0.141	☹	0.220	0.000	0.000	☹	0.000	0.000	0.000	☹
	ΔY	0.177	0.163	0.161	☹	1.000	0.251	0.000	☹	0.177	0.183	0.193	😐
	ΔZ	0.556	0.494	0.523	😐	1.000	1.000	1.000	☺	1.000	0.443	0.299	😐
1003-101	ΔX	1.429	2.245	2.669	☺	1.000	1.000	1.000	☺	1.000	1.000	1.000	☺
	ΔY	0.560	2.090	2.935	☺	1.000	1.000	1.000	☺	1.000	1.000	1.000	☺
	ΔZ	0.603	1.247	1.920	☺	1.000	1.000	1.000	☺	1.000	1.000	1.000	☺

5. İRDELEME VE SONUÇ

Yapılan uygulama ile uyuşumsuz ölçü analizi için seçilen GPS ağındaki baz ölçüleri kullanılarak dengeleme hesabı yapılmıştır. Elde edilen düzeltme değerleri ile geleneksel yöntemlerden t-testi kullanılarak uyuşumsuz ölçüler belirlenmiştir. Geleneksel çözüm yöntemiyle uyuşumlu ölçü grubuna 10. iterasyonda ulaşılmıştır ve uyuşumsuz bulunan 9 ölçü, ölçü grubundan çıkarılmıştır. Aynı sonuçlar kullanılarak Robust kestirim yöntemlerinden L1-norm yöntemi, Danimarka yöntemi ve Yang-II kestirim fonksiyonları ile uyuşumsuz ölçüler grubu belirlenmiştir. Robust kestirim yönteminde ağırlıklar kestirim fonksiyonu ile yeniden belirlenerek uyuşumsuz ölçüler ölçü grubundan çıkarılmamış, sonuçlara yaptıkları etkiler azaltılmıştır.
Robust kestirimi için yapılan çözümde Danimarka ve Yang-II yöntemlerinde uyuşumsuz bulunan ölçülerin ağırlıkları azalarak sıfıra yaklaşmıştır. L1-norm yönteminde ise uyuşumsuz ölçülerin ağırlıkları değişmemiş diğer ölçülerin ağırlıkları ise büyümüştür. Her 3 yöntemde yaklaşık aynı sonuçları bulmuştur.
Robust kestirim yöntemleri ile uyuşumsuz bulunan ölçüler, geleneksel çözüm yöntemleri ile bulunan ölçüleri de içermektedir ve ayrıca başka ölçülerde uyuşumsuz ölçü olarak bulunmuştur. Uyuşumsuz bulunan bu ölçüler iki kısımda ele alınabilir. Bir kısım ölçülerin geleneksel çözüm yöntemlerindeki ölçülere ek olarak tamamen uyuşumsuz olarak belirlendiği görülmüştür. Bu ölçülerin ağırlığının Danimarka ve Yang-II yönteminde sıfır olduğu, L1 yönteminde ise az miktar değiştiği belirlenmişitr. Uyuşumsuz olarak belirlenen ölçülerin bulunan diğer kısmında ise ölçü ağırlıkların başlangıçtakinden farklı olduğu fakat tamamen uyuşumsuz olarak belirleyemediği, şüpheli bıraktığı görülmüştür. Bu ölçülerin ağırlığı Danimarka ve Yang-II yönteminde tamamen sıfır olmamış, L1 norm yönteminde ise diğer noktalara oranla daha az değişim göstermiştir. Robust kestirim yöntemlerinden L1-norm yöntemi 12 uyuşumsuz, 10 şüpheli, 38 uyuşumlu ölçü; Danimarka yöntemi 10 uyuşumsuz, 5 şüpheli, 45 uyuşumlu ölçü; Yang-II yöntemi 5 uyuşumsuz, 15 şüpheli, 40 uyuşumlu ölçü bulmuştur.
Yapılan bu çözüm sonucunda robust kestirim yöntemlerinin uyuşumsuz ölçüleri belirleme konusunda çok başarılı olduğu görülmüştür. Bu yöntem ölçüleri ölçü grubundan çıkarmadığı bazı ölçülerin ağırlığını sıfır yaparak çözümdeki etkilerini yok ederken diğer ölçülerin ağırlıklarını ölçeklendirdiği görülmüştür. Bu sonuçlara dayanarak uyuşumsuz ölçüler analizinde sadece geleneksel yöntemlerin kullanılmasının çok doğru bir yaklaşım olmadığı, bu yöntemin yanında destekleyici olarak robust kestirim yönteminin de kullanılması gerektiği görülmüştür. Robust kestirim yöntemleri arasında yapılan irdelemede L1-norm yönteminin de uyuşumsuz ölçüleri belirlemekte diğer yöntemlerle yaklaşık aynı sonuçları verdiği ve başarılı olduğu sonucuna varılmıştır.

KAYNAKLAR

Aktaş, O. A., 1993, *Robust Kestirim ve Nirengi Ağlarına Uyarlanması*, Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul,.

Ata, M., 1995, *Uyuşumsuz Ölçülerin Belirlenmesinde Klasik En Küçük Kareler Yöntemi İle Değişik Robust Kestirim Yöntemlerinin Uygulanması ve Karşılaştırılması*, Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul,

Ayan, T., 1992 *Uyuşumsuz Ölçüler Testi*, Harita ve Kadastro Mühendisliği Dergisi, 72, 38-46.

Barrodale, I.. and Roberts, F.D.K., 1973, *An improved algorithm for discrete l1 linear approximation.* SIAM J. Numer. Anal. 10, 5, 839-848.

Bektaş, S. 2005, Dengeleme Hesabı, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Yayınları, Samsun.

Caspary and Barutta, 1987, *Robust Estimation Deformation Models,* Survey Review, 29, 2333, 29-45.

Dilaver, A., 1996, *Jeodezik Ağlarda Kaba Hatalı Ölçülerin Ayıklanması ve Güven Ölçütleri,* Karadeniz Teknik Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliği Bölümü Araştırma Raporları, 1996/2, Trabzon,.

Dilaver, A., Konak, H. ve Çepni M. S., 1998, *Jeodezik Ağlarda Uyuşumsuz Ölçülerin Yerelleştirilmesinde Kullanılan Yöntemlerin Davranışları*, Harita ve Kadastro Mühendisliği Dergisi, 84, 17-31.

Erenoğlu, R. C., 2003. *Jeodezik Ağlarda Uyuşumsuz Ölçülerin Robust Yöntemlerle Belirlenmesi*, Yüksek Lisans Tezi, Y.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Gökalp, E., Güngör, O., Boz, Y., 2008, *Evaluation of Different Outlier Detection Methods for GPS Networks,* Sensors, 8(11), 7344-7358

Hampel, F., Ronchetti, E. M., Rousseeuw, P. J. and Stahel, W. A., 1986, *Robust Statistics The Approach Based on Influence Functions*, A Wiley-Interscience Publication John Wiley & Sons, New York.

Hekimoğlu, Ş., 1995, *Reliability of The Conventional Iterative Outlier Detection Test Procedures,* First Turkisch-German Joint Geodetic Days, 93-103.

Hekimoğlu, Ş., Ayan, T. ve Aktaş, O. A., 1993, *Birden Fazla Uyuşumsuz Ölçünün Robust Kestirim Yöntemleri İle Tanısı ve Uyuşumsuz Ölçü Testleri İle Belirlenmesi,* Prof. Dr. H. Wolf Jeodezi Sempozyumu, İstanbul, 171-193.

Huber, P.J.; 1964, *Robust Estimation of a Location Parameter*, Ann. Math. Statistics, 35(1):73-101.

Kara, H. H., 1998, *Ölçülerin İteratif Çözüm Yöntemleri İle Belirlenmesinde Geleneksel En Küçük Kareler Yöntemi İle Değişik Robust Kestirim Yöntemlerinin Uygulanması ve Karşılaştırılması*, Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Konak, H., 1994. *Yüzey Ağlarının Optimizasyonu*, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Öztürk, E. ve Şerbetçi, M., 1992, *Dengeleme Hesabı Cilt III*, Karadeniz Teknik Üniversitesi Basımevi, Trabzon.

Pilgrim, L., 1996, *Robust Estimation Applied to Surface Matching,* ISPRS Journal of Photogrammetry And Remote Sensing, 51, 243-257.

Yang, Y., 1999, *Robust Estimation of Geodetic Datum Transformation,* Journal of Geodesy, 73, 268-274.

Yavuz, E., Coşkun, Z. ve Baykal, O., 2001, *Yatay Kontrol Ağlarının Dengelenmesinde Kullanılan Stokastik Modellerin Karşılaştırılmasına İlişkin Kriterler*, Türkiye 8. Bilimsel ve Teknik Harita Kurultayı, Ankara, 64-76.