YEREL AĞLARIN ÜÇ BOYUTLU DENGELENMESİ

Yd. Doç. Dr. Aslan DİLAVER
Yd. Doç. Dr. Celalettin KARAALİ
KTÜ

1. GİRİŞ

Jeodezik faaliyetlerin ana iskeletini teşkil eden jeodezik kontrol ağları kuruldukları alanın genişliğine göre; büyük ağlar (Ülke, Kıta ve Bölgesel ağlar) ve yerel ağlar (Şehir, Kasaba v.b. ağlar) şeklinde sınıflandırılırlar.

Jeodezik kontrol ağları klasik yaklaşımla; yatay kontrol ağı (Nirengi ağı) ve düşey kontrol ağı (Nivelman ağı) şeklinde birbirinden bağımsız iki parçalı olarak kurulup hesaplanırlar. Ancak, yatay ve düşey kontrol ağlarının birbirine bağımlılıkları, hesaplanmalarında kullanılan ölçülerin stokastik özellikleri ve bilgisayarlardan yararlanma imkanları göz önüne alındığında, artık günümüzde jeodezik kontrol ağlarının modern yaklaşımla üç boyutlu tek bir ağ şeklinde; bütünleşik olarak kurulması, yatay ve düşey kontrolu aynı bir matematik model içinde birlikte ele alan ve hesaplanmalarındaki zorlayıcı koşulları mümkün olduğunca azaltan hesap yollarının izlenmesi gerekli olmaktadır.

Jeodezik kontrol ağlarının dengelenmesinden amaç; ağda bilinmeyen olarak seçilen büyüklüklerin, yeryüzünde yapılan veya yeryüzünde yapılıp hesap yüzeyine indirgenen gereğinden fazla ölçülerin fonksiyonu olarak, ölçülerin duyarlıkları ve aralarındaki korelasyonların da dikkate alınmasıyla tek anlamlı olarak hesaplanmalıdır. Bu hesap için gerekli dönüşüm bağıntıları dengelemenin matematik modelini oluşturur. Matematik model, ölçülerle bilinmiyenler arasındaki deterministik ilişkileri sağlayan "fonksiyonel model" ve ölçülerin duyarlıklarını ve aralarındaki korelasyonları içeren "stokastik model"den meydana gelmektedir.

Bu yazıda noktaları arasındaki eğik uzunlukları, yatay ve düşey açıları ölçülmüş bir yerel ağın endirekt ölçüler yöntemine göre üç boyutlu dengelemesi ele alınmaktadır. Hesaplarda referans yüzeyi olarak hesap bölgesinde ortalama deniz yüzeyi (jeoid) ile çakıştığı varsayılan küre yüzeyi alınıp yeryüzü noktaları küre normalleri boyunca küre yüzeyine izdüşürülmekte ve noktaların yatay ve düşey konum bileşenleri aynı bir matematik model içinde (birbirleriyle bağımlı şekilde) hesaplanmaktadır. Yeryüzü noktaları ile izdüşüm noktaları arasındaki uzaklık düşey konum bileşeni, küre yüzeyindeki izdüşüm noktalarının düzlem yaklaşımla hesaplanan dik koordinatları da yatay konum bileşenleri olarak alınmaktadır.

2. DENGELEME MODELİ

Nokta koordinatlarının bilinmeyen seçildiği endirekt ölçüler dengelemesinde fonksiyonel model düzeltme denklemlerinden, ölçüler arasında korelasyon olmadığı durumda stokastik model ölçü ağırlıklarından meydana gelir. Burada ele alınmakta olan yerel ağların endirekt ölçüler yöntemiyle üç boyutlu dengelenmesinde, ölçü olarak; ağ noktaları arasındaki eğik uzunluklar (S_{ik}), yatay doğrultular (r_{ik}) ve düşey açılar (β_{ik}), bilinmeyenler olarak; noktaların hesap bölgesinde ortalama deniz yüzeyi ile çakıştığı varsayılan küre yüzeyinden küre normalleri boyunca uzaklıkları (h_i) ve küre yüzeyindeki izdüşüm noktalarının küre yüzeyindeki S_o yay boyuna göre düzlem yaklaşımla hesaplanacak olan dik koordinakları (y,x) seçilmiştir (şekil.1). Şekilde P_1 ve P_k yeryüzü noktalarını, S_{ik} ve β_{ik} yeryüzü noktaları arasındaki eğik uzunluğu ve düşey açısı, P'_i ve P'_k yeryüzü noktalarının seçilen küre yüzeyi üzerindeki izdüşümlerini, S_o ise S_{ik} eğik uzunluğunun küre düzeyindeki karşılığını göstermektedir.

Düzeltme Denklemlerinin Kurulması:

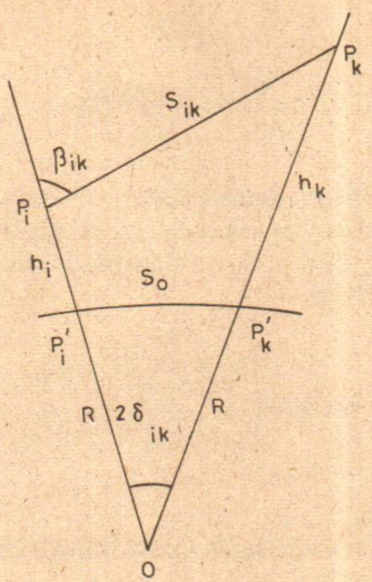
Noktaları arasındaki yatay doğrultuları (r_{ik}), düşey açıları (β_{ik}) ve eğik uzunlukları (S_{ik}) ölçülmüş bir yerel ağın üç boyutlu dengelenmesine ilişkin düzeltme denklemlerinin kurulmasında ölçülerle bunların kesin değerleri arasında.

- yatay doğrultular için; $r_{ik}+v^r_{ik}+z_i=\overline{\alpha}_{ik}$

- düşey açılar için; $\beta_{ik}+v^\beta_{ik}=\overline{\beta}_{ik}$ (1)

- eğik uzunluklar için; $S_{ik}+v^s_{ik}=\overline{S}_{ik}$

şeklinde yazılan bağıntılardan yararlanılır. Burada z_i, P_i noktasındaki yöneltme bilinmeyeni, $\overline{\alpha}_{ik}$, $\overline{\beta}_{ik}$ ve $\overline{S}_{ik}$ ise ağ noktaları arasındaki semtlerin, düşey açıların ve eğik uzunlukların kesin değerleridir.



Şekil: 1

Düzeltme denklemlerinin kuruluş aşamasında ölçülerinkesin değerleri bilinemez. Eğer noktaların kesin koordinatlarından dx, dy ve dh kadar farklı yaklaşık koordinatları (x_i^0, y_i^0, h_i^0) bilinirse, bunlardan α_{ik}^0 β_{ik}^0 ve S_{ik}^0 yaklaşık değerleri hesaplanabilir. Noktaların yaklaşık koordinatları ağ noktalarında yapılan ölçüler yardımıyla koordinat taşıması yoluyla hesaplanabilir.

α_{ik}^0 , β_{ik}^0 ve S_{ik}^0 yaklaşık değerlerine göre (1) eşitliklerinde yapılan doğrusallaştırma neticesinde;

- yatay doğrultular için,

$$r_{ik}+v_{ik}^r+z_i=\alpha_{ik}^0+\frac{\partial \bar{\alpha}_{ik}}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial \bar{\alpha}_{ik}}{\partial y_i}dy_i+\frac{\partial \bar{\alpha}_{ik}}{\partial x_k}dx_k+\frac{\partial \bar{\alpha}_{ik}}{\partial y_k}dy_k$$

- düşey açılar için,

$$\beta_{ik}+v_{ik}^{\beta}+\beta_{ik}^0+\frac{\partial \alpha \bar{\beta}_{ik}}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial \alpha \bar{\beta}_{ik}}{\partial y_i}dy_i+\frac{\partial \alpha \bar{\beta}_{ik}}{\partial h_k}dh_i+\frac{\partial \alpha \bar{\beta}_{ik}}{\partial x_k}dx_k+$$

$$+\frac{\partial \alpha \bar{\beta}_{ik}}{\partial y_k}dy_k+\frac{\partial \alpha \bar{\beta}_{ik}}{\partial h_k}dh_k \qquad (2)$$

- eğik uzunluklar için,

$$S_{ik}+v_{ik}^s+S_{ik}^0+\frac{\partial \bar{S}_{ik}}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial \bar{S}_{ik}}{\partial y_i}dy_i+\frac{\partial \bar{S}_{ik}}{\partial h_i}dh_i+\frac{\partial \bar{S}_{ik}}{\partial x_k}dx_k$$

$$+\frac{\partial \bar{S}_{ik}}{\partial y_k}dy_k+\frac{\partial \bar{S}_{ik}}{\partial h_k}dh_k$$

birinci dereceden doğrusallaştırılmış denklemleri elde edilir. Bu denklemlerdeki katsayılar, noktaların referans yüzeyine izdüşümüne, eğik uzunluk ölçülerinin indirgenmesine ve hesaplarda yapılan düzlem yaklaşımlara uygun olarak yerel ağlar için yeterli yaklaşıklıkla, şekil.1'den

$$\Delta y = y_k - y_i = 2R \arcsin\left\{\frac{S_{ik}(1-\frac{Hi}{R})\,\mathrm{Sin}(\beta_{ik}-2\delta_{ik})}{2R\,\mathrm{Cos}\,\delta_{ik}}\right\}\sin\alpha_{ik}$$

$$\Delta x = x_k - x_i = 2R \arcsin\left\{\frac{S_{ik}(1-\frac{Hi}{R})\,\mathrm{Sin}(\beta_{ik}-2\delta_{ik})}{2R\,\mathrm{Cos}\,\delta_{ik}}\right\}\mathrm{Cos}\,\alpha_{ik} \quad (3)$$

$$+\rho C_{ik}\frac{\mathrm{Cos}(\beta_{ik}-\delta_{ik})\mathrm{Sin}\alpha_{ik}}{S_{ik}}dy_k-\rho\frac{\mathrm{Sin}(\beta_{ik}-2\delta_{ik})}{S_{ik}}dh_k-1^{\beta}_{ik}$$

biçiminde yazılabilen bağıntılardan yararlanılarak aşağıdaki şekilde elde edilirler.

$$\frac{\partial\alpha_{ik}}{\partial x_i}=-\frac{\partial\alpha_{ik}}{\partial x_i}=\frac{\mathrm{Cos}\alpha_{ik}}{2R\,\mathrm{arcSin}(\Omega_{ik})} \qquad 1$$

$$\frac{\partial\alpha_{ik}}{\partial y_i}=-\frac{\partial\alpha_{ik}}{\partial y_i}=\frac{\mathrm{Cos}\alpha_{ik}}{2R\,\mathrm{arcSin}(\Omega_{ik})} \qquad 2$$

$$\frac{\partial\beta_{ik}}{\partial x_i}=-\frac{\partial\alpha_{ik}}{\partial x_i}=-C_{ik}\frac{\mathrm{Cos}(\beta_{ik}-\mathrm{e}_{ik})\,\mathrm{Cos}\alpha_{ik}}{S_{ik}} \qquad 3$$

$$\frac{\partial\beta_{ik}}{\partial y_i}=-\frac{\partial\alpha_{ik}}{\partial y_i}=-C_{ik}\frac{\mathrm{Cos}(\beta_{ik}-a_{ik})\,\mathrm{Sin}\alpha_{ik}}{S_{ik}} \qquad 4$$

$$\frac{\partial\beta_{ik}}{\partial h_i}=-\frac{\partial\alpha_{ik}}{\partial h_k}=-C_{ik}\frac{\mathrm{Sin}(\beta_{ik}-2\delta_{ik})}{S_{ik}} \qquad 5$$

$$\frac{\partial S_{ik}}{\partial x_i}=-\frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k}=-C_{ik}\sin(\beta_{ik}-\delta_{ik})\,\mathrm{Cos}\alpha_{ik} \qquad 6$$

$$\frac{\partial S_{ik}}{\partial y_i} = -\frac{\partial S_{ik}}{\partial y_k} = -C_{ik}\sin(\beta_{ik} - \delta_{ik})\, \mathrm{Sin}\alpha_{ik} \qquad 7$$

$$\frac{\partial S_{ik}}{\partial h_i} = -\frac{\partial S_{ik}}{\partial h_k} = -\mathrm{Cos}\beta_{ik} - 2\delta_{ik} \qquad 8$$

Burada;

$$\Omega_{ik} = \left| S_{ik}\left(1 - \frac{H_i}{R}\right)\sin(\beta_{ik} - 2\delta_{ik}) \right| / (2R\, \mathrm{Cos}\alpha_{ik})$$

$$C_{ik} = \left\{ \sqrt{4R^2 \mathrm{Cos}^2\delta_{ik} \; S^2_{ik}\left(1 - \frac{H_i}{R}\right)^2 \mathrm{Sin}^2(\beta_{ik} - 2\delta_{ik})} \right\} / \left\{ 2R\left(1 - \frac{H_i}{R}\right) \mathrm{Cos}\delta_{ik} \right\}$$

dir. Yukarıdaki katsayılar (2) denklemlerinde yerlerine yazılırsa düzeltme denklemleri;

- yatay doğrultular için,

$$v^r_{ik} = -dz_i + \rho \frac{\mathrm{Sin}\alpha_{ik}}{2R\, \mathrm{arcSin}(\Omega_{ik})} dx_i - \rho \frac{\mathrm{Cos}\alpha_{ik}}{2R\, \mathrm{arcSin}(\Omega_{ik})}$$

$$- \rho \frac{\mathrm{Sin}\alpha_{ik}}{2R\, \mathrm{arcSin}(\Omega_{ik})} dx_k + \rho \frac{\mathrm{Cos}\alpha_{ik}}{2R\, \mathrm{arcSin}(\Omega_{ik})} dy_k - 1^r_{ik}$$

- düşey açılar için,

$$v^\beta_{ik} = -\rho C_{ik} \frac{\mathrm{Cos}(\beta_{ik} - \delta_{ik})\mathrm{Cos}\alpha_{ik}}{S_{ik}} dx_i - \rho C_{ik} \frac{\mathrm{Cos}(\beta_{ik} - \delta_{ik})\mathrm{Sin}\alpha_{ik}}{S_{ik}}$$

$$+ \rho \frac{\mathrm{Sin}(\beta_{ik} - 2\delta_{ik})}{S_{ik}} dh_i + \rho C_{ik} \frac{\mathrm{Cos}(\beta_{ik} - \delta_{ik})\mathrm{Cos}\alpha_{ik}}{S_{ik}}$$

$$+ \rho C_{ik} \frac{\mathrm{Cos}(\beta_{ik} - \delta_{ik})\mathrm{Sin}\alpha_{ik}}{S_{ik}} dy_k - \rho \frac{\mathrm{Sin}(\beta_{ik} - 2\delta_{ik})}{S_{ik}} dh_k - 1^\beta_{ik}$$

- eğik uzunluklar için,

$$V^{s}_{ik} = -C_{ik}\,Sin(\beta_{ik}-\delta_{ik})\,Cos\alpha_{ik}\,dx_i - C_{ik}\,Sin(\beta_{ik}-\delta_{ik})Sin\alpha_{ik}\,dy_i$$

$$-\,Cos(\beta_{ik}-2\delta_{ik})dh_i - C_{ik}Sin(\beta_{ik}-\delta_{ik})Cos\alpha_{ik}dx_k +$$

$$+\,C_{ik}\,Sin(\beta_{ik}-\delta_{ik})\,Sin\alpha_{ik}\,dy_i - Cos(\beta_{ik}-2\delta_{ik})dh_k - 1^{s}_{ik}$$

şeklinde bulunur. Bu denklemlerdeki sabit terimler (1^{r}_{ik} , 1^{β}_{ik} , 1^{s}_{ik}), ölçülerle yaklaşık değerlerden faydalanarak,

$$-1^{r}_{ik} = \alpha_{ik} - (r_{ik} + z^{o}_{i}) - 1_{ik} = \beta_{ik} - (\beta^{o}_{ik} - K\delta_{ik})$$

$$-1^{s}_{ik} = S^{o}_{ik} - S_{ik}$$

şeklinde hesaplanır. Burada K refraksiyon katsayısıdır. yaklaşık yöneltme bilinmiyeni de P_i noktasından gözlenen doğrultu sayısı n olmak üzere

$$z^{o}_{i} = (\alpha^{o}_{ik} - r_{ik})/n$$

olarak hesaplanır.

Bu bağıntılar, S_o yay boyu yerine kiriş veya teğet uzunluklarına göre geliştirilmeleri durumunda düzeltme denklemlerinin katsayıları daha basit şekle dönüşmektedir.

Ağırlıkların Belirlenmesi:

Kullanılan yatay doğrultu, düşey açı ve eğik uzunluk ölçülerinin duyarlılıkları farklıdır. Bu nedenle, bu ölçülerin aynı matematik model içinde birlikte ele alınmaları durumunda bunların duyarlık farklılıkların göz önüne alınması gerekmektedir. Bu durum ölçülerin birbirlerine göre ağırlıklarının belirlenmesi suretiyle çözümlenir.

Ağırlıkların genel tanımına göre; ağırlık $P_i = c/m^2$ dir. Burada a bir birim ağırlıkta seçilen ölçün karesel ortalama hatasıdır. Buna göre; m_d duyarlığında

öülmüş bir yatay doğrunun ağırlığı $P_d = c/m^2_d$ m_s nda ölçülmüş bir eğik

uzunluğun ağırlığı $P_s = c/m^2_s$ m_β duyarlığındalçülmüş bir düşey açının ağır-

lığı veğında ölçülmüş ın ağırlığı da$P_\beta = c/m^2_\beta$ olarak belirlenir.

Bilinmeyenlerin Hesabı:

Nokta koordinatlarının bilinmiyen olarak seçildiği bir ağda, gereğinden fazla sayıdaki yatay doğrultu, düşey açı ve eğik uzunluk ölçülerinden nokta koordinatlarını bulmak için kurulan düzeltme denklemlerinin, ölçülerin ağırlıkları da dikkate alınarak, tek anlamlı çözümü Gauss'un en küçük ka-reler yöntemiyle elde edilir. v ölçülerin düzeltmelerinden oluşan vektör, A katsayılarından oluşan matris, x koordinat bilinmiyenlerinden, 1 de sabit terimlerinden oluşan vektör olmak üzere düzeltme denklemleri için kurulan matematik model kısaca $v = Ax - 1$ şeklinde yazılır. Bu matematik modelin, ölçü ağırlıklarından oluşan P matrisini dikkate alan $v^TPv =$ min. ilkesine göre çözümünden dx, dy, dh bilinmiyenlerini içeren x bilinmiyenler vektörü $x = (A^TPA)^{-1} A^TPl$ olarak elde edilir. Buna göre, noktaların kesin koordinatlarını içeren x vektörü $x = x^o + x$ şeklinde bulunur. Duyarlık incelemesi ise $Q_{xx} = (A^TPA)^{-1}$ şeklinde elde edilen ağırlık katsayıları ters matrisi ile $m_o^2 = v^TPv/(n-u)$ şeklinde hesaplanan karesel ortalama hatanın karesinden $C_{xx} = m_o^2 Q_{xx}$ şeklinde oluşturulan varyans-kovaryans matrisinin elemanlarından alışılagelen yöntemlerle yapılır.

Eğer noktaların herhangi projeksiyon yüzeyindeki koordinatları istenirse; ya bulunan koordinatlar projeksiyon yüzeyine indirgenir ya da dengelemeden önce ölçülere projeksiyona geçiş düzeltmesi getirilir.

3. SONUÇ:

Jeodezik kontrol ağlarına ait ölçülerdeki ve hesaplama araçlarındaki gelişmeler, bu ağların üç boyutlu tek bir ağ şeklinde kurulmasını ve yatay ve düşey konumun aynı matematik model içinde birlikte hesaplanmasını gündeme getirmiştir. Bu düşünceden hareket edilerek noktaları arasındaki yatay doğrultuları, eğik uzunlukları ve düşey (başucu) açıları ölçülmüş bir yerel ağın tek bir matematik model yardımıyla üç boyutlu dengelenmesi için geliştirilen bağıntılar verilmiştir. Geliştirilen model de başucu açılarındaki refraksiyonun etkisi sorun olarak görülmektedir. Bu sorun, ya refraksiyonun etkisinin önceden bilinerek ölçülerin düzeltilmesiyle ya da dengelemenin matematik modeline bir bilinmeyen olarak eklemesiyle yenilenebilir.

KAYNAKLAR

FUBARA, D.M.J. (1972): Three-Dimensional Adjustment of Terrestrial Geodetic Network, Canadian Surveyor, Vol. 26. No.4

HIRADILEK, L. (1984): Three-Dimensional Terrestrial Triangulation, Stuttgart.

MEZERA, D.F./ (1983): Comparization of Three-Dimensional Geodetic Adjustment of Local Networks, American Congress on Surveying and Mapping.

SHRESTHA, R.L. (1984): Three-Dimensional Adjustment Computation

Model, Journal of Surveying Engineering, Vol.110,No.1

MIKHAIL, E.M. (1976): Observation and Least Squares New York.

ÖZTÜRK, E. (1986): Doğrultu-Kenar Ağlarının Dengelenmesi, Harita ve Kadastro Mühendisleri Odası, Sayı 54-55

ŞERBETÇİ, M. (1986): Bilinmiyenlerin de Ölçülmesi ile Yapılan Dengeleme, TUJJB, Jeodezi Komisyonu Toplantıları, Ankara.

WALKER, F. (1967): Adjustment of Astro, Geodetic Triangulation Network, Technical Report, No. 60, Washington.