JEODEZİK AĞLARIN BİRLEŞTİRİLMESİ

Prof. M. ŞERBETÇİ
K.T.Ü.

ÖZET

Bir bölgeye ait ölçülmüş ve dengelenmiş nirengi, nivelman, gravite vb. bir ağa ilave olarak sonradan ölçü ile bağlanan yeni bir ağın hesaplanmasında izlenen yol, eski ağın sınır noktalarının sabit ve hatasız kabul ederek yeni ağın bu noktalara bağlanmasıdır. Bu işlem ise fonksiyonel ve stokastik modeldeki bazı bilgilerin gözardı edilmesi demektir. Yapılan bu işlem pratik bazı görevleri her ne kadar karşılasa bile doğru olanı, bu iki ağın birlikte ve toptan dengelenmesidir. Toptan dengeleme yerine yeni ağ ele alınarak eski ağa ait sınır noktalarındaki bilgilerden de yararlanarak toptan dengeleme sonuçları elde edilebilir. Bunun için problem, önceden hesaplanmış ağın normal denklemlerinin tersinde sınır noktalarındaki bilinmeyenlere ait korelasyon matrisinin ek ağda dikkate alınmasıyla bilinmeyenli koşullu ölçüler (korelasyonlu) dengelemesi şeklinde ve bir hesap oyunu ile de korelasyonlu endirekt ölçüler dengelemesine şekline dönüştürülür. Bu şekilde hem sınır noktalarına hem de ek ağa ait bilinmeyenlerin kesin değerleri hesaplanır. Sınır noktalarındaki bilinmeyenlerin kesin değerleri ile de ilk ağdaki "İç Bilinmeyenler" hesaplanır.

Ağların birleştirilmesi düşüncesi bunun karşıtı olan ağların bölünmesi fikrini de birlikte getirdiğinden büyük ağların bölünerek dengelenmesi de buradaki ilkelerin ışığında yapılabilir.

Konunun uygulanmasına ilişkin nümerik bir örnek verilmiştir.

1- GİRİŞ

Bir bölgeye ait dengelenmiş jeodezik bir ağa ikinci bir ağ eklenmesi gerektiğinde genellikle izlenen yol, bu ağlardan ilkine ait koordinat, yükseklik, vb. bilgiler sabit ve hatasız kabul edilerek sonraki ağı bu noktalara bağlamak biçimindedir. Oysa ilk ağa ait bir dengeleme sonucu elde edilen bu değerler bağımsız olmayıp kendi aralarında korelasyonludur. Doğru olan yöntem, bu iki ağın yeni baştan toptan dengelenmesidir. Yeni baştan bu iki ağın birlikte toptan dengelenmesi yerine, yapılıp bitmiş ilk ağın dengeleme hesaplarından yararlanarak bu bilgilerden gerekeni ikinci ağda dikkate alarak da aynı sonuların bulunabileceği birkaç yöntemle gösterilmiştir. Ağların birleştirilmesi düşüncesi, bunun karşıtı olan, ağların bölünmesi fikrini de birlikte getirdiğinden, büyük ağların bölünerek dengelenmesi de buradaki ilkeler ışığında gerçekleştirilebilir.

Bu konu ile ilgili olarak gerek parça ağların ayrı dengelenmesi, gerek toptan dengeleme, programlama tekniği yönünden uygun olan endirekt (dolaylı) ölçüler dengelenmesi biçiminde düşünülmüştür.

Kolaylık yönünden matris gösterimi yeğlenmiş ve konunun daha iyi anlaşılması için tüm yöntemler sayısal küçük bir örneğe uygulanmıştır.

2- AĞIN TOPTAN DENGELENMESİ

Komşu iki ağ şematik olarak aşağıdaki şekilde olsunlar:

I ve II. ağa ait düzeltme denklemleri

$$
\begin{array}{llll}
v_1 = A_1\,x + B_1\,y & & -\,l_1 & \text{ağırlık: } P_1 \quad (1) \\
v_2 = & B_2\,y + C_2\,z & -\,l_2 & P_2 \quad (2)
\end{array}
$$

biçiminde yazılır. Burada:

l_1 : I. ağa ait ölçüler vektörü
v_1 : I. ağın ölçülerine getirilen düzeltmeler vektörü
l_2 : II. ağa ait ölçüler vektörü
v_2 : II. ağın ölçülerine getirilen düzeltmeler vektörü
x : I. ağa ait iç bilinmeyenler vektörü
z : II. ağa ait iç bilinmeyenler vektörü
y : ortak bilinmeyenler (sınır üzerinde her iki ağda kullanılan noktalara ait) vektörü
P_1, P_2 : ilgili ağırlık matrisleri
A_1, B_1, B_2, C_2 : ilgili katsayı matrisleridir.

Ağın toptan dengelenmesi için (1) ve (2)'den kurulacak normal denklemler:

$$
\begin{array}{llll}
A_1^T P_1 A_1 x & + A_1^T P_1 B_1\,y & & -A_1^T P_1 l_1 = 0 \\
B_1^T P_1 A_1 x & (B_1^T P_1 B_1 + B_2^T P_2 B_2)\,y & + B_2^T P_2 C_2 z & - (B_1^T P_1 l_1 + B_2^T P_2 l_2) = 0 \quad (3) \\
 & C_2^T P_2 B_2\,y & + C_2^T P_2 C_2 z & -C_2^T P_2 l_2 = 0
\end{array}
$$

biçimindedir.

$$
\begin{array}{lll}
A_1^T P_1 A_1 = N_{11} & B_2^T P_2 B_2 = M_{22} & A_1^T P_1 l_1 = n_1 \\
A_1^T P_1 B_1 = N_{12} & B_2^T P_2 C_2 = N_{23} & B_1^T P_1 l_1 = n_2 \quad (4)
\end{array}
$$

$$B_1^T P_1 A_1 = N_{12}^T \qquad C_2^T P_2 B_2 = N_{23}^T \qquad B_2^T P_2 l_2 = m_2$$

$$B_1^T P_1 B_1 = N_{22} \qquad C_2^T P_2 C_2 = N_{33} \qquad C_2^T P_2 l_2 = n_3$$

kısaltmaları ile normal denklemler,

$$\begin{aligned} N_{11} x \quad & + N_{12} y & & - n_1 & = 0 \\ N_{12}^T x + (N_{22} & + M_{22}) y & + N_{23} z & - (n_2 + m_2) & = 0 \\ & + N_{23}^T y & + N_{33} z & - n_3 & = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

biçiminde yazılır. Bu denklemlerden x bilinmeyen vektörünün yok edilmesi ile:

$$\begin{aligned} (N_{22} + M_{22} - N_{12}^T N_{11}^{-1} N_{12}) y + N_{23} z - (n_2 + m_2 - N_{12}^T N_{11}^{-1} n_1) &= 0 \\ N_{23}^T y + N_{33} z - n_3 &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

aynı şekilde z vektörünün yok edilmesi ile:

$$\begin{aligned} & (N_{22} + M_{22} - N_{12}^T N_{11}^{-1} N_{12} - N_{23} N_{33}^{-1} N_{23}^T) y - \\ & (n_2 + m_2 - N_{12}^T N_{11}^{-1} n_1 - N_{23} N_{33}^{-1} n_3) = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

bulunur. Bu bilinmeyen hesaplandıktan sonra (5) denklem sisteminin ilk ve son satırlarından diğer bilinmeyenler hesaplanır.

$$\begin{aligned} x &= N_{11}^{-1} (n_1 - N_{12} y) \\ z &= N_{33}^{-1} (n_3 - N_{23}^T y) \end{aligned} \tag{8}$$

3- GRUP HALİNDE DENGELEME

Toptan dengeleme sonucunda elde edilen kesin sonuçların aşağıda gösterilen çeşitli yollarla da elde edilmesi mümkündür.[3,5] Bunun için (1) ile verilen denklemleri I. grup olarak düşünülüp, bu denklemlerden kurulacak normal denklemler (4) kısaltmaları ile:

$$N_{11}\,x + N_{12}\,y - n_1 = 0$$

$$N_{12}^T x + N_{22}\,y - n_2 = 0 \tag{9}$$

biçiminde yazılarak bu denklemlerden

$$(N_{22} - N_{12}^T N_{11}^{-1} N_{12})\,y - (n_2 - N_{12}^T N_{11}^{-1} n_1) = 0 \tag{10}$$

ve buradan

$$y = (N_{22} - N_{12}^T N_{11}^{-1} N_{12})^{-1} (n_2 - N_{12}^T N_{11}^{-1} n_1) \tag{11}$$

elde edilir. y bilinmeyenine ait korelasyon matrisi ise

$$Q_{yy} = (N_{22} - N_{12}^T N_{11}^{-1} N_{12})^{-1} \tag{12}$$

dir. (11) ile hesaplanan değerler sadece I. gruptan elde edildiği için kesin y değerleri değildir. Ayrıca bu bilinmeyenin dışında grup iç bilinmeyenleri x ve z bilinmeyenlerinin de bulunması gerekir.

3.1- Her iki grubu ayrı ayrı çözerek ortak bilinmeyen vektörü y'nin her iki gruptan bulunan değerlerinin birbirlerine eşit olması koşulu yazılması yöntemi.[1,3] s. 11, [4]

Gruplardan bulunan geçici y^I ve y^{II} bilinmeyenleri ve ilave edilen e_y^I ve e_y^{II} düzeltmeleri ile birbirlerine eşit olması gerekir:

$$y^I + e_y^I = y^{II} + e_y^{II} \tag{13}$$

Bu koşul denklemi

$$e_y^I - e_y^{II} + w = 0 \tag{14}$$

biçiminde yazılır. Burada

$$w = y^I - y^{II} \tag{15}$$

dir. Ancak bu denklemdeki ölçü olarak düşünülen y^I ve y^{II} değerleri daha önce bir dengeleme sonucunda elde edildiğinden kendi aralarında korelasyonludur. Korelasyon matrisleri, bu bilinmeyenlere ait normal denklemlerin terslerinde ilgili kısımlardır. Örneğin y^{I} için (12) denklemindeki Q^{I}_{yy} dir. Aynı şekilde II. gruptan da elde edilen y^{II} ve ilgili Q^{II}_{yy} matrisleri ile korelasyonlu koşullu ölçüler dengelemesi uygundur. (14) denklemleri

$$\begin{bmatrix} E - E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{I}_{y} \\ e^{II}_{y} \end{bmatrix} + (y^{I} - y^{II}) = 0 \tag{16}$$

şeklinde yazılarak

$$Q = \begin{bmatrix} Q^{I}_{yy} & 0 \\ 0 & Q^{II}_{yy} \end{bmatrix} \tag{17}$$

korelasyon matrisinin de dikkate alınmasıyla kurulacak normal denklemler:

$$(Q^{I}_{yy} + Q^{II}_{yy})\, k + (y^{I} - y^{II}) = 0 \tag{18}$$

buradan

$$k = -\,(Q^{I}_{yy} + Q^{II}_{yy})^{-1}\,(y^{I} - y^{II}) \tag{19}$$

elde edilir. Düzeltmeler ise:

$$\begin{bmatrix} e^{I}_{y} \\ e^{II}_{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{I}_{yy} \\ -\,Q^{II}_{yy} \end{bmatrix} .\, k \tag{20}$$

bağıntısı ile hesaplanır. Buradan bulunacak düzeltmeler geçici y^{I} ve y^{II} bilinmeyenleri ile toplanarak kesin y elde edilir.

$$y = y^{I} + e^{I}_{y} = y^{II} + e^{II}_{y} \tag{21}$$

Bulunan bu değerle ilk gruptan x, ikinci gruptan da z bilinmeyen vektörleri hesaplanır.

3.2- Birinci gruptan bulunan y bilinmeyenlerinin 2. grupta yerine konulması ile bilinmeyenli korelasyonlu koşullu ölçüler dengelemesi biçiminde çözüm

y bilinmeyeninin kesin değeri için 1. gruptan bulunan y^I değerine v_y düzeltmesinin eklenerek bulunacağı düşünülürse,

$$y = y^I + v_y \tag{22}$$

II. grupta (22) nin dikkate alınması ile

$$v_2 = B_2\,(y^I + v_y) + C_2 z - l_2 \qquad \text{Ağırlık } P_2 \tag{23}$$

veya

$$[E - B_2] \begin{bmatrix} v_2 \\ v_y \end{bmatrix} - C_2 z + w_2 = 0 \tag{24}$$

Burada

$$w_2 = l_2 - B_2 y^I \tag{25}$$

dir. Ölçülere ait korelasyon matrisi

$$Q = \begin{bmatrix} P_2^{-1} & 0 \\ 0 & Q_{yy} \end{bmatrix} \tag{26}$$

dikkate alınarak kurulacak normal denklemler

$$\begin{aligned} (P_2^{-1} + B_2 Q_{yy} B_2^T)\,k - C_2 z + w_2 &= 0 \\ - C_2^T\,k &= 0 \end{aligned} \tag{27}$$

şeklinde yazılır. Bu denklemlerin çözümü ile

$$z = (C_2^T (P_2^{-1} + B_2 Q_{yy} B_2^T)^{-1}\, C_2)^{-1}\, C_2^T\, (P_2^{-1} + B_2 Q_{yy} B_2^T)^{-1}\, w_2 \tag{28}$$

ve

$$k = (P_2^{-1} + B_2 Q_{yy} B_2^T)^{-1} (C_2 z - w_2) \tag{29}$$

düzeltmeler ise

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2^{-1} & 0 \\ 0 & Q_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ -B_2^T \end{bmatrix} k \tag{30}$$

veya

$$v_2 = P_2^{-1} k$$

$$v_y = -Q_{yy} B_2^T k \tag{31}$$

olarak hesaplanır. Buradan hesaplanan v_2, II. gruba ait kesin düzeltmelerdir. v_y ise (22)' de yerine konularak kesin y değerleri elde edilir. Kesin x değeri, (9)'da kesin y değerleri yerine konularak hesaplanır. v_1 ise (1)'den hesaplanır.

3.3- Bilinmeyenli korelasyonlu koşul denklemlerinin korelasyonlu endirekt ölçüler dengelemesi şekline çevirerek çözüm

Burada izlenen yol 3.2 yönteminde (23) denklemine kadar aynı olup (23)'te

$$\overline{v}_2 = v_2 - B_2 v_y \tag{32}$$

düşünsel bir $\overline{v}_2$ düzeltme vektörü konularak

$$\overline{v}_2 = C_2 z - w_2 \tag{33}$$

biçiminde endirekt ölçüler dengelemesi şekline dönüşür. Ancak bu yeni düşünsel $\overline{v}_2$ düzeltmelerine ait 1_2 düşünsel ölçüleri de orijinal ölçülerin bir fonksiyonu olması dolayısıyla korelasyonlu olacağı için (33) denklemlerinden korelasyonlu endirekt ölçüler dengelemesi ilkelerine göre normal denklemlerin kurulması gerekir.[2]

Genel olarak 1 eski ölçülerin bir fonksiyonu, 1 ise

$$I = A1 \tag{34}$$

bu yeni 1 ölçülerine ait korelasyon matrisi

$$Q_{\bar{1}\bar{1}} = AP^{-1} A^T \tag{35}$$

dir. (32) denklemi gözönüne alınırsa

$$A = [E \quad -B_2] \quad \text{ve} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} P_2^{-1} & 0 \\ 0 & Q_{yy} \end{bmatrix} \tag{36}$$

olduğundan (35) ile verilen formül

$$Q_{11} = P_2^{-1} + B_2 Q_{yy} B_2^T \tag{37}$$

olur. (33) denkleminden kurulacak normal denklemler ise

$$C^T Q_{\bar{1}\bar{1}}^{-1} C_2 z - C_2^T Q_{\bar{1}\bar{1}}^{-1} w_2 = 0 \tag{28}$$

biçimindedir. Bu denklemlerin çözümü ile

$$z = (C_2^T Q_{\bar{1}\bar{1}}^{-1} C_2)^{-1} C_2^T Q_{\bar{1}\bar{1}}^{-1} w_2 \tag{39}$$

olur. Bu değerin (32)'de yerine konulması ile $\bar{v}_2$ elde edilir. v_2 ve v_y hesabı için

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ v_y \end{bmatrix} = P^{-1} A^T Q_{\bar{1}\bar{1}}^{-1} \bar{v}_2 \tag{40}$$

formülü uygulanır. Bu formülde (36) ve (37) dikkate alınarak

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2^{-1} & 0 \\ 0 & Q_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ -B_2^T \end{bmatrix} (P_2^{-1} + B_2 Q_{yy} B_2^T)^{-1} \bar{v}_2 \tag{41}$$

veya

$$v_2 = P_2^{-1} (P_2^{-1} + B_2 Q_{yy} B_2^T)^{-1} \bar{v}_2 \tag{42}$$

$$v_y = -Q_{yy} B_2^T (P_2^{-1} + B_2 Q_{yy} B_2^T)^{-1} \bar{v}_2 \tag{43}$$

yazılır. (42) ve (43) formüllerinin (29) ve (33)'ün dikkate alınması ile (31) formülleri ile aynı olduğu görülür. Bundan sonra izlenecek yol 3.2 yönteminde (31) formülünden sonraki gibidir.

3.4- Helmert Yöntemi ile Çözüm

Her gruba ait bağımsız olarak kurulan normal denklemlerden iç bilinmeyenler elimine edilir.

$$A_1^T P_1 A_1 x + A_1^T P_1 B_1 y - A_1^T P_1 l_1 = 0 \tag{44}$$

$$B_1^T P_1 A_1 x + B_1^T P_1 B_1 y - B_1^T P_1 l_1 = 0$$

x bilinmeyeninin eliminesi ve (4) kısaltmaları ile

$$(N_{22} - N_{12}^T N_{11}^{-1} N_{12})\, y - (n_2 - N_{12}^T N_{11}^{-1} n_1) = 0 \tag{45}$$

Aynı şekilde 2. gruptan bağımsız olarak kurulan normal denklemler

$$\begin{aligned} B_2^T P_2 B_2 y + B_2^T P_2 C_2 z - B_2^T P_2 l_2 &= 0 \\ C_2^T P_2 B_2 y + C_2^T P_2 C_2 z - C_2^T P_2 l_2 &= 0 \end{aligned} \tag{46}$$

(4) kısaltmaları ile ve ortak bilinmeyenlerin sona alınması ile

$$N_{33} z + N_{23}^T y - n_3 = 0$$

$$N_{23} z + M_{22} y - m_2 = 0 \tag{47}$$

Bu denklemlerden z bilinmeyeninin eliminesi ile

$$(M_{22} - N_{23} N_{33}^{-1} N_{23}^T)\, y - (m_2 - N_{23} N_{33}^{-1} n_3) = 0 \tag{48}$$

(45) ve (48) denklemlerinin terim terim toplanması ile:

$$(N_{22} + M_{22} - N_{12}^T N_{11}^{-1} N_{12} - N_{23} N_{33}^{-1} N_{23}^T)\, y -$$

$$(n_2 + m_2 - N_{12}^T N_{11}^{-1} n_1 - N_{23} N_{33}^{-1} n_3) = 0 \tag{49}$$

elde edilir. Bu denklemin toptan dengeleme sonucu (7) denklemleri ile aynı olduğu görülür. Grupların iç bilinmeyenleri hesabı için (49) ile hesaplanan y değerleri (44) de konularak x, (46)'da yerine konarak z elde edilir.

4- SAYISAL UYGULAMA

Aşağıda çeşitli ağırlıkta verilmiş 6 bilinmeyenli 10 düzeltme denklemlerinin ilk beşi I. grup ve son beşi II. gruba ait olsunlar.

$$\begin{array}{lcc} & & \text{Ağırlık} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{lrc}
v_1 = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 & +1 & 1 \\
v_2 = x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 & +2 & 2 \\
v_3 = x_1 \quad + x_3 + 2x_4 & +3 & 3 \\
v_4 = \quad x_2 - x_3 & +4 & 4 \\
v_5 = x_1 \quad x_3 + x_4 & +5 & 5
\end{array}\right\} \text{I. Grup}$$

$$\left.\begin{array}{lrc}
v_6 = \quad x_3 - x_4 + x_5 - x_6 & -1 & 1 \\
v_{7.} = \quad x_4 - x_5 & -2 & 2 \\
v_8 = \quad x_3 \quad + x_5 - x_6 & -3 & 3 \\
v_9 = \quad x_3 \quad - x_5 & -4 & 4 \\
v_{10} = \quad x_4 \quad - x_6 & -5 & 5
\end{array}\right\} \text{II. Grup}$$

Burada

x_1 , x_2	I. gruba ait x vektörü,
x_3 , x_4	ortak bilinmeyen vektörü
x_5 , x_6	II. gruba ait z vektörünü temsil etsinler.

Toptan dengeleme:

Yukarıdaki düzeltme denklemlerinden normal denklemler kurularak çözülürse:

Bilinmeyenler:	Düzeltmeler:	
$x_1 = -4.724$	$v_1 = -3.605$	$v_6 = +2.397$
$x_2 = -1.467$	$v_2 = +0.820$	$v_7 = +0.691$
$x_3 = +1.221$	$v_3 = -1.233$	$v_8 = +0.032$

$x_4 = -0.365$ $\qquad v_4 = +1.312$ $\qquad v_9 = +0.227$

$x_5 = -3.056$ $\qquad v_5 = +1.132$ $\qquad v_{10} = -0.498$

$x_6 = -4.867$

3.1. yöntemine göre çözüm:

I. gruptan kurulan normal denklemlerin çözümü ile

$$\begin{bmatrix} x^I \\ \\ y^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19.789 \\ +\ 8.632 \\ +12.368 \\ +\ 2.210 \end{bmatrix}$$

Normal denklemlerin ters matrislerinden alınan Q^I_{yy} :

$$Q^I_{yy} = \begin{bmatrix} 4.254 & 1.193 \\ 1.193 & 0.491 \end{bmatrix}$$

dir. Aynı şekilde II. gruba ait normal denklemlerin çözümü ile

$$\begin{bmatrix} y^{II} \\ \\ z^{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1.391 \\ +0.841 \\ -2.319 \\ -3.928 \end{bmatrix} \qquad Q^{II}_{yy} = \begin{bmatrix} 0.616 & 0.681 \\ 0.681 & 1.044 \end{bmatrix}$$

(13)'e göre

$$x^I_3 + e^I_{x_3} = x^{II}_3 + e^{II}_{x_3}$$

$$x^I_4 + e^I_{x_4} = x^{II}_4 + e^{II}_{x_4}$$

(19)'a göre

$$k = -\begin{bmatrix} 4.870 & 1.874 \\ \\ 1.874 & 1.535 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 10.977 \\ \\ +1.369 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.604 \\ \\ 3.508 \end{bmatrix}$$

(20)'ye göre

$$e_y^I = \begin{bmatrix} -11.146 \\ -\ \ 2.577 \end{bmatrix} \qquad e_y^{II} = \begin{bmatrix} -0.169 \\ -1.208 \end{bmatrix}$$

(21)'den denetimli olarak

$$y = \begin{bmatrix} 1.222 \\ -0.367 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu sunoçlar yuvarlatma hatası içinde toptan dengeleme sonuçları ile aynıdır. Bu değerlerle I. ve II. grup normal denklemlere girilerek diğer bilinmeyenlerin kesin değerleri elde edilir.

3.2 yöntemine göre çözüm

I. gruptan elde edilen geçici değerler II. grupta yerine konulursa elde edilecek (24) e göre bilinmeyenli koşul denklemleri sayısal olarak:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & -1 & +1 \\ & 1 & & & & & -1 \\ & & 1 & & & -1 & \\ & & & 1 & & -1 & \\ & & & & 1 & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \\ v_{x_3} \\ v_{x_4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & +1 \\ +1 & \\ -1 & +1 \\ +1 & \\ & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9.158 \\ 0.210 \\ 9.368 \\ 8.368 \\ -2.790 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olur. (26)'nın da dikkate alınması ile kurulan normal denklemin çözümü (28)'e göre ve (29)'a göre

$$z = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.052 \\ -4.860 \end{bmatrix} \qquad k = \begin{bmatrix} 2.398 \\ 1.387 \\ 0.105 \\ 1.121 \\ -\ 2.506 \end{bmatrix}$$

(31)'den

$$v_2 = \begin{bmatrix} 2.398 \\ 0.694 \\ 0.035 \\ 0.280 \\ -0.501 \end{bmatrix} \qquad v_y = \begin{bmatrix} v_{x_3} \\ v_{x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11.221 \\ -2.597 \end{bmatrix}$$

Bu değerler 3.1 yöntemi ile elde edilen e^{I}_{y} ile yuvarlatma hataları içinde aynıdırlar. Bundan sonrası 3.1'deki gibidir.

3.3 yöntemine göre çözüm

I. gruptan elde edilen geçici değerler II. grupta yerine konularak (32)'ye göre

$$\begin{array}{lccc|l}
v_6 & -v_{x_3} & +v_{x_4} & = & \bar{v}_6 = x_5 - x_6 + 9.158 \\
v_7 & & -v_{x_4} & = & \bar{v}_7 = -x_5 \qquad + 0.210 \\
v_8 & -v_{x_3} & & = & \bar{v}_8 = x_5 - x_6 + 9.368 \\
v_9 & -v_{x_3} & & = & \bar{v}_9 = -x_5 \qquad + 8.368 \\
v_{10} & & -v_{x_4} & = & \bar{v}_{10} = \qquad -x_6 - 2.790
\end{array}$$

düzeltme denklemleri elde edilir. (37)'ye göre hesaplanacak $Q_{\bar{l}\bar{l}}$

$$Q_{\bar{l}\bar{l}} = \begin{bmatrix} 3.359 & 0.702 & 3.061 & 3.061 & 0.702 \\ 0.702 & 0.991 & 1.193 & 1.193 & 0.491 \\ 3.061 & 1.193 & 4.587 & 4.254 & 1.193 \\ 3.061 & 1.193 & 4.254 & 4.504 & 1.193 \\ 0.702 & 0.491 & 1.193 & 1.193 & 0.691 \end{bmatrix}$$

nin de dikkate alınması ile (38) normal denklemleri

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 9.337 & -5.174 \\ -5.174 & 5.106 \end{bmatrix}}_{\text{(32)'ye göre}} \cdot \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3.345 \\ -9.028 \end{bmatrix}}_{\text{(42)'den}} \quad \text{veya} \quad \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3.052 \\ -4.860 \end{bmatrix}}_{\text{(43)'ten}}$$

$$\overline{v}_2 = \begin{bmatrix} 10.966 \\ 3.262 \\ 11.176 \\ 11.420 \\ 2.070 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.401 \\ 0.693 \\ 0.043 \\ 0.282 \\ 0.507 \end{bmatrix} \quad v_y = \begin{bmatrix} v_{x_3} \\ v_{x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11.211 \\ -2.596 \end{bmatrix}$$

Bundan sonra izlenecek yol 3.2'deki gibidir.

3.4 Yöntemine Göre Çözüm

I. gruptan kurulan normal denklemler:

$$\begin{aligned} 11\,x_1 - x_2 + 13\,x_3 + 12\,x_4 + 39 &= 0 \\ -x_1 + 7x_2 - 7\,x_3 - 3\,x_4 + 13 &= 0 \\ 13\,x_1 - 7x_2 + 21\,x_3 + 14\,x_4 + 27 &= 0 \\ 12\,x_1 - 3x_2 + 14\,x_3 + 20\,x_4 + 46 &= 0 \end{aligned}$$

bu denklemlerden x_1 ve x_2 nin eliminesi ile:

$$\begin{aligned} 0.735\,x_3 - 1.790\,x_4 - 5.151 &= 0 \\ -1.790\,x_3 + 6.381\,x_4 + 8.032 &= 0 \end{aligned}$$

II. Gruptan kurulan normal denklemler: (ortak bilinmeyenler sona gelecek biçimde düzenlenirse)

$$\begin{aligned} 10\,x_5 - 4\,x_6 \qquad\quad - 3\,x_4 + 10 &= 0 \\ -4\,x_5 + 9\,x_6 - 4\,x_3 - 4\,x_4 + 35 &= 0 \\ -4\,x_6 + 8\,x_3 - x_4 - 26 &= 0 \\ -3\,x_5 - 4\,x_6 - x_3 + 8\,x_4 - 28 &= 0 \end{aligned}$$

x_5 ve x_6 nın eliminesi ile:

$$\begin{aligned} 5.836\,x_3 - 3.812\,x_4 - 4.920 &= 0 \\ -3.812\,x_3 + 3.444\,x_4 + 2.404 &= 0 \end{aligned}$$

Her iki gruptan elde edilen denklem sistemlerinin terim terim (49)'a göre toplanması ile:

$$\begin{aligned} 6.571\,x_3 - 5.602\,x_4 - 5.151 &= 0 \\ -5.602\,x_3 + 9.825\,x_4 + 10.436 &= 0 \end{aligned}$$

Bu denklemlerin çözümü ile:

$$x_3 = 1.221\ ,\ x_4 = -0.366$$

elde edilir. Bu değerlerle I. grup normal denklemlerden:

$$x_1 = -4.723\ ,\ x_2 = -1.468$$

II. grup normal denklemlerden:

$$x_5 = -3.056\ ,\ x_6 = -4.867$$

elde edilir. Bu değerler de yuvarlatma hataları içinde toptan dengeleme sonuçları ile aynı olduğu görülür.

4- SONUÇ

Jeodezik ağların birleştirilmesi veya önceden hesaplanan bir ağa yeni bir ağın eklenmesinin endirekt ölçüler dengelemesi ile toptan dengeleme yerine gruplar halinde hesaplamanın çok çeşitli yolları vardır. Yukarıda en çok uygulanan birkaç yöntem gösterilmiştir. Bu yöntemlerin irbirlerine göre farklılıkları dolayısıyla bazı problemlerin çözümünde birbirlerine göre yeğlenebilirler. Ortak bilinmeyenlerin sayısı, grupların boyutları, önceden hesaplanan ağın ters matrisinin hazır olup olmadığı vb. faktörler bu yöntemlerin seçiminde önemli rol oynar. Hesaplama tekniği yönünden daha az işlem gerektirdiği ve fazla karışık olmaması dolayısıyla Avrupa nirengi ağının yeniden dengelenmesi (Retrig) işlemi 3.4 yöntemi ile yapılmıştır.

KAYNAKLAR

(1) Öztürk, E., Yenileme ve sıklaştırma ağının dengelenmesi, TUJJB Komisyonu Toplantısı, 5-6 Mayıs 1986, Ankara (baskıda)

(2) Şerbetçi, M., Bilinmeyenli koşullu ölçüler dengelemesinin endirekt ölçüler dengelemesine dönüşümü, Harita Dergisi, Sayı 97, 1986, Ankara.

(3) Şerbetçi, M., En küçük kareler yöntemine göre dengelemede gruplara ayırma, KTÜ, 1972, Trabzon.

(4) Şerbetçi, M., Über gruppenweise Ausgleichung bei vermittelnden Beobachtungen, Jeodezi Bülteni Cilt 1, Sayı 2, 1970, Trabzon.

(5) Wolf, H., Strenge Verfahren zum Zusammenschluss von Schwere-Höhen- und Astronomische Laengennetzen, DGK Reihe A., 53, 1966 München.