

23-27 ŞUBAT 1987
TA VE KADASTRO MÜHENDİSLERİ ODASI



V. BİLİMSEL VE TEKNİK OTURUM

27 ŞUBAT 1987 CUMA ÖĞLEDEN SONRA

Oturum Başkanı : Dr. İlhan ÖZDİLEK
Oturum II. Başkanı : Ziya SÖNMEZ
Oturum Yazmanı : Namık GAZİOĞLU

**SAYISAL YÜKSEKLİK MODELLERİNDE
PARÇA PARÇA BİLİNEER YÜZEYLERDE ENTERPOLASYON**

Y. Doç. Dr. Attilâ GÜLER
Karadeniz Üniversitesi

ABSTRACT

The interpolation of the Digital Elevation Models by the piecewise continuous surfaces has been used since 1971. The mathematical surface model consists of a large family of locally valid, smoothly joining surface functions. This paper describes the interpolation by the local piecewise bilinear surfaces which are smoothly jointed.

ÖZET

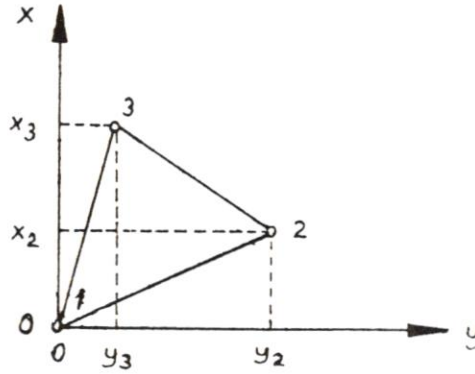
Sayısal Yükseklik Modellerinin parça parça sürekli yüzeylerle enterpolasyonu 1971'den beri kullanılmaktadır. Matematik yüzey, yerel olarak geçerli ve düzgün olarak birleşen çok sayıda aynı cins yüzey fonksiyonlarından oluşmuştur. Bu bildiri, düzgün olarak birleştirilen yerel bilineer yüzey parçaları ile enterpolasyonu tanımlamaktadır.

1. GİRİŞ

Parça parça polinomlardan oluşturulan bir yüzeyde parçaların sınırları boyunca polinomun derecesinin bir eksik derecesinde süreklilik sağlanabilir ve böylece düzgün bir yüzey elde edilebilir. Jeodezi ve Fotogrametri alanında parça parça polinomlarla enterpolasyon konusu ilk kez Bosman, Eckhart, Kubik tarafından araştırılmış ve rasgele dağılmış örnekleme noktalarına dayanarak yüzeyi analitik olarak göstermek için farklı modüllerden oluşan "Delft" adlı bir yazılım paketi geliştirilmiştir (Bosman, Eckhart, Kubik, 1971). Düzgün yüzey oluşturulması için H. Sünkel bikübik temel splaynlardan yararlanmıştır ve "GSPP (Geodetic Science Plotting Package)" yazılım paketi oluşturulmuştur (Sünkel, 1980' Münih Teknik Üniversitesinden H. Ebner ve çalışma arkadaşları temel splaynlardan yüzey oluşturma konusunu sonlu elemanlar yöntemine uyarlamış ve "HIFI (Height Interpolation by Finite Elements)" yazılım paketini Carl Zeiss firması adına geliştirmişlerdir (Ebner, Hofmann, Reiss, Steidler, 1980).

Bu bildiri, temelde özdeş olan bu üç ayrı yaklaşımla verilen bilineer yüzey parçaları ile yüzey oluşturma konusu kuramın ayrıntılarına girmeden açıklanmaya çalışılacaktır.

2. LİNEER ENTERPOLASYON



Şekil 1

Lineer bir yüzey herhangi bir konumdaki bir düzlem olup yerel bir koordinat sisteminde,

$$h = a_0 + a_1 x + a_2 y \quad (1)$$

polinomu ile belirlidir. Başlangıcı 1 noktasındaki şekil 1'de görülen yerel bir koordinat sisteminde,

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

matris eşitliği sözkonusudur. Burada a_i katsayıları,

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

eşitliği ile elde edilebilir. Burada,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{x_2 y_3 - x_3 y_2} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & 0 & 0 \\ y_2 - y_3 & y_3 & -y_2 \\ x_3 - x_2 & -x_3 & x_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

biçimindedir.

Burada a_i katsayıları,

$$a_0 = h_1$$

$$a_1 = [(y_2 - y_3)h_1 + y_3 h_2 - y_2 h_3] / (x_2 y_3 - x_3 y_2),$$

$$a_2 = [(x_3 - x_2)h_1 - x_3 h_2 + x_2 h_3] / (x_2 y_3 - x_3 y_2) \quad (5)$$

olarak elde edilir. Böylece düzlemin eşitliği,

$$h = h_1 + \frac{1}{x_2 y_3 - x_3 y_2} \left\{ [(y_2 - y_3)h_1 + y_3 h_2 - y_2 h_3]x + [(x_3 - x_2)h_1 - x_3 h_2 + x_2 h_3]y \right\} \quad (6)$$

olur. (6) eşitliği yeniden düzenlenirse,

$$h = \frac{1}{x_2 y_3 - x_3 y_2} \left\{ [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y]h_1 + (y_3 x - x_3 y)h_2 + (x_2 y - y_2 x)h_3 \right\} \quad (7)$$

elde edilir. Burada h_i 'in katsayılarına ağırlık fonksiyonları olarak bakılabilir. Böylelikle yerel koordinat sisteminde koordinatları x, y olan ve bu düzlem üzerinde bulunan bir noktanın yüksekliği,

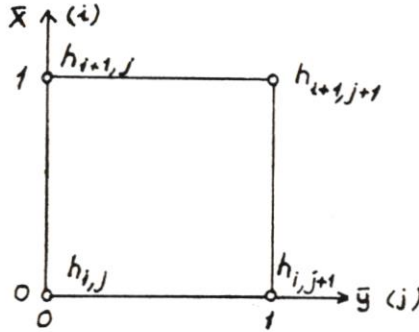
$$h = \sum_{i=1}^3 w_i(x, y)h_i \quad (8)$$

ile bulunabilir. $w_i(x, y)$ ağırlık fonksiyonları,

$$\begin{aligned}
w_1(x, y) &= [(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)] / (x_2y_3 - x_3y_2), \\
w_2(x, y) &= (y_3x - x_3y) / (x_2y_3 - x_3y_2), \\
w_3(x, y) &= (x_2y - y_2x) / (x_2y_3 - x_3y_2)
\end{aligned} \tag{9}$$

ile belirlidir.

3. BİLİNEER ENTERPOLASYON



Şekil 2

Bilineer yüzeye parabolik hiperboloid de denir ve bu yüzey, başlangıcı i, j olan normlandırılmış yerel bir koordinat sisteminde,

$$h = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy \tag{10}$$

eşitliği ile belirlidir. Şekil 2, kare biçiminde dizilmiş dört noktanın oluşturduğu bilineer yüzeyi göstermektedir. Burada koordinat sistemi kare uzunluğu ile normlandırılmış ve i, j no.lu noktanın bulunduğu konum yerel koordinat sisteminin başlangıcı olarak alınmıştır. Dört köşe noktasının yükseklikleri,

$$\begin{bmatrix} h_{i,j} \\ h_{i,j+1} \\ h_{i+1,j} \\ h_{i+1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \tag{11}$$

matris gösterimi ile elde edilebilir. a_k ($k = 0, 1, 2, 3$) katsayıları,

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} h_{i,j} \\ h_{i,j+1} \\ h_{i+1,j} \\ h_{i+1,j+1} \end{bmatrix} \tag{12}$$

ile elde edilir. Burada,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

ile belirlidir. Çözüm yapılırsa, a_k ($k = 0, 1, 2, 3$) katsayıları,

$$\begin{aligned} a_0 &= h_{i,j}, \\ a_1 &= h_{i+j,j} - h_{i,j}, \\ a_2 &= h_{i,j+1} - h_{i,j}, \\ a_3 &= h_{i,j} + h_{i+1,j+1} - h_{i,j+1} - h_{i+1,j} \end{aligned} \quad (14)$$

olarak elde edilir. Bu durumda bilineer yüzey parçasının eşitliği,

$$\begin{aligned} h &= h_{i,j} + (h_{i+1,j} - h_{i,j})x + (h_{i,j+1} - h_{i,j})y \\ &\quad + (h_{i,j} + h_{i+1,j+1} - h_{i,j+1} - h_{i+1,j})xy \end{aligned} \quad (15)$$

biçiminde elde edilir. (15) eşitliği yeniden düzenlenirse,

$$h = (1-x)(1-y)h_{i,j} + x(1-y)h_{i+1,j} + y(1-x)h_{i,j+1} + xyh_{i+1,j+1} \quad (16)$$

eşitliği bulunur. (16) eşitliğinde h 'lı terimlerin katsayıları ağırlık katsayıları gibi alınırsa,

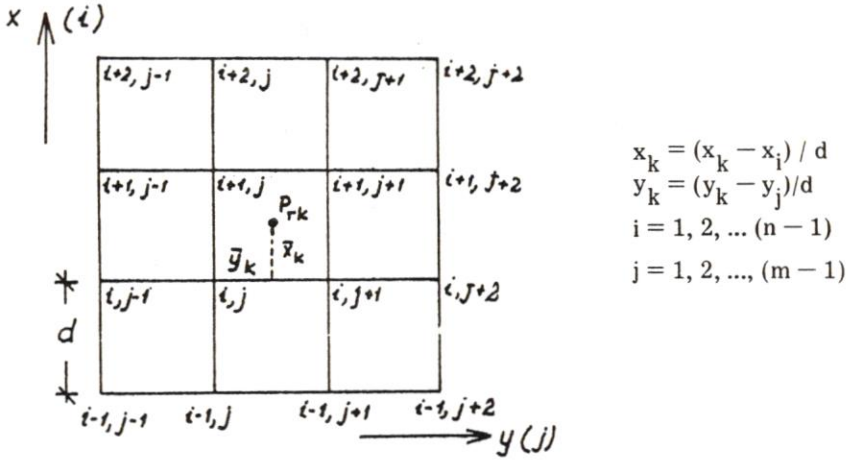
$$h = \sum_{i=1}^{i+1} \sum_{j=1}^{j+1} w_{i,j}(x,y)h_{i,j} \quad (17)$$

olur. Burada ağırlık fonksiyonları,

$$\begin{aligned} w_{i,j}(x,y) &= (1-x)(1-y), \\ w_{i,j+1}(x,y) &= y(1-x), \\ w_{i+1,j}(x,y) &= x(1-y), \\ w_{i+1,j+1}(x,y) &= xy \end{aligned} \quad (18)$$

ile belirlidir.

4. PARÇA PARÇA BİLİNEER YÜZEYLERLE ENTERPOLASYON



Şekil 3

Şekil 3'te görülen ve sayısal yükseklik modeli için enterpolasyonu istenen kare grid ağına ait noktaların yükseklikleri bilinmeyenler olarak tanımlanır. Bu grid noktalarının yükseklikleri, arazide rasgele dağılmış olarak ölçülen örnekleme noktalarının h_k yükseklikleri ve enterpolasyon yüzeyinin genel bir eğrilik minimazasyonu ile elde edilir. Bu problem bir dolaylı ölçüler dengelemesi olarak yorumlanabilir ve en küçük kareler yöntemi kullanılarak çözülebilir.

P_{rk} örnekleme noktasının yüksekliği, çevresindeki dört adet bilinmeyen grid noktasının yüksekliklerinin (16) eşitliği biçiminde bir fonksiyondur. Koordinatları x_k, y_k olan bir P_{rk} örnekleme noktasının başlangıcı i, j noktasında bulunan kare gridindeki x_k, y_k normlandırılmış koordinatları,

$$x_k = (x_k - x_i) / d,$$

$$y_k = (y_k - y_j) / d,$$

$$d = x_{i+1} - x_i = y_{j+1} - y_j,$$

$$i = 1, 2, \dots, (n-1), \quad j = 1, 2, \dots, (m-1)$$

(19)

ile belirli ise, (16) eşitliğinde y ve x yerine normlandırılmış yerel koordinatları yazmak gerekir. Böylece normlandırılmış yerel koordinatları x_k, y_k ve yüksekliği h_k olan P_{rk} örnekleme noktası, $h_{i,j}, h_{i,j+1}, h_{i+1,j}, h_{i+1,j+1}$ bilinmeyenlerini içeren bir düzeltme denklemini oluşturur. Katsayılar x_k ve y_k 'nin lineer fonksiyonlarıdır. P_{rk} örnekleme noktasına ilişkin düzeltme denklemleri,

$$v_{rk} = (1 - x_k)(1 - y_k)h_{i,j} + x_k(1 - y_k)h_{i+1,j} + y_k(1 - x_k)h_{i,j+1} + x_k y_k h_{i+1,j+1} - h_k$$

$$k = 1, 2, \dots, q$$

$$i = 1, 2, \dots, (n-1)$$

$$j = 1, 2, \dots, (m-1)$$

(20)

biçimindedir. Burada q örnekleme noktalarının sayısı; n , x eksen yönündeki yönündeki grid çizgisi sayısı; m , y eksen yönündeki grid çizgisi sayısıdır. Bütün örnekleme noktaları için içindeki buldukları kare grid başlangıcına göre normlandırılmış yerel koordinatları ile (20) eşitliği biçiminde düzeltme denklemleri yazılır. (20) biçimindeki bütün denklemlere h_k gözlemlerinin doğruluğuna ve istenilen filtreleme büyüklüğüne bağlı olarak ağırlıklar verilebilir.

Parça parça bilineer yüzeylerle oluşturulan yüzeyde eğrilik minimizasyonu, entropolasyon yüzeyinin bütün ikinci türevlerinin sıfır olması nedeniyle tam olarak gerçekleştirilemez. Bunun yerine yüksekliklerin ikinci farkları kullanılır. Herbir i, j grid noktası için x ve y doğrultularında yüksekliklerin ikinci farklarına ilişkin,

$$v_{cx,i,j} = h_{i,j,j} - 2h_{i,j} + h_{i+1,j} - 0$$

$$i = 2, 3, \dots, (n-1); j = 1, 2, \dots, m \quad (21)$$

$$v_{cy,i,j} = h_{i,j-1} - 2h_{i,j} + h_{i,j+1} - 0$$

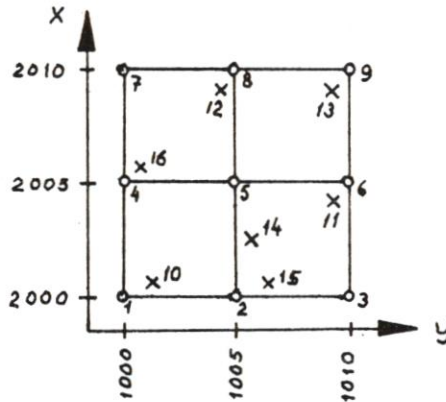
$$i = 1, 2, \dots, n; j = 2, 3, \dots, (m-1)$$

biçiminde düzeltme denklemleri oluşturulur. Bu düzeltme denklemleri imgesel denklemler olup, parça parça bilineer yüzeylerden oluşan tüm yüzeyi düzğünleştirmeye yöneliktir. En basit yol, homojen ve izotrop bir alan olan bir arazi için bütün bu imgesel düzeltme denklemlerini eşit doğrulukta ve korelasyonsuz olarak gerçekleştirmektir.

(20) ve (21) eşitlikleri biçimindeki düzeltme denklemleri elde edildikten sonra, bu düzeltme denklemlerinden normal denklemler sistemi oluşturulur. Normal denklemler sistemi indirgenerek grid noktalarına ait yükseklikler elde edilir.

Bu yöntemde istenirse arazide ölçülmüş kırık çizgiler de dikkate alınabilir. Bunun için lineer yüzeylerle bilineer yüzeyleri birleştirerek kullanmak gerekir.

5. ÖRNEK UYGULAMALAR



Şekil 4

Şekil 4 enterpolasyon yapılacak grid ağını ve bu grid ağında rasgele dağılmış örnekleme noktalarını göstermektedir. Burada 1, 2, ..., 8, 9 numaralı noktalar yükseklikleri enterpole edilecek grid noktalarıdır. 10, 11, ..., 12, 13 numaralı noktalar enterpolasyonda kullanılacak örnekleme noktaları olup, bunların koordinat ve yükseklikleri tablo 1'de verilmiştir. Birim kare kenarı uzunluğu 5 metredir.

No.	y	x	h
10	1001.00	2001.00	16.25
11	1009.00	2004.00	14.50
12	1004.00	2009.00	15.70
13	1009.00	2009.00	16.85
14	1005.50	2002.50	13.80
15	1006.50	2000.50	15.60
16	1000.50	2006.00	16.05

Tablo 1: Örnekleme noktalarının koordinat ve yükseklikleri

No.	$\frac{y-1000}{5}$	$\frac{x-2000}{5}$	h
10	0.2	0.2	16.25
11	1.8	0.8	14.50
12	0.8	1.8	15.70
13	1.8	1.8	16.85
14	1.1	0.5	13.80
15	1.3	0.1	15.60
16	0.1	1.2	16.05

Tablo 2: Normlandırılmış koordinatlar

x ve y doğrultularında her bir grid noktası için eğrilik minimizasyonunu gerçekleştirmek için (21) eşitliği biçiminde yazısal imgesel düzeltme denklemleri ile her bir P_{rk} örnekleme noktasına ait (20) eşitliği biçimindeki düzeltme denklemleri tablo 3'de görülmektedir. Bu düzeltme denklemlerinden oluşturulan normal denklemler sistemi ve çözüm vektörü tablo 4'te verilmiştir. Şekil 5 bu enterpolasyon sonucu oluşan yüzeyi göstermektedir. Bu yüzey üzerinde herhangi bir P_u noktası içinde bulunduğu gridin köşe noktalarından yararlanarak (12) ve (10) bağıntıları ile bulunabilir. Görüldüğü gibi yüzey parçalarını birleşme yerlerinde belirgin bir kırıklık içermeyen düzgün bir biçimde oluşmuştur.

Tablo 3: Düzeltme denklemleri

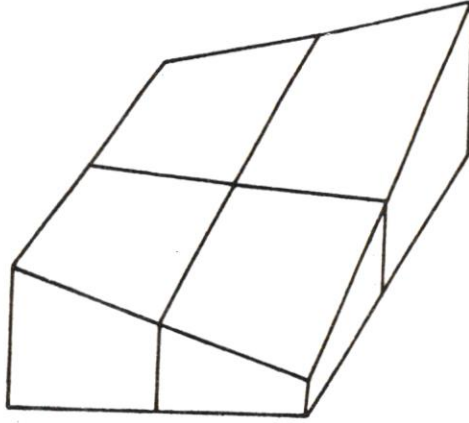
	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8	h_9	1
1,2,3	1	-2	1							0
4,5,6				1	-2	1				0
7,8,9							1	-2	1	0
1,4,7	1			-2			1			0
2,5,8		1			-2			1		0
3,6,9			1			-2			1	0
10	0.64	0.16		0.16	0.04					16.25
11		0.04	0.16		0.16	0.64				14.50
12				0.04	0.16		0.16	0.64		15.70
13					0.04	0.16		0.16	0.64	16.85
14		0.45	0.05		0.45	0.05				13.80
15		0.63	0.27		0.07	0.03				15.60
16				0.72	0.08		0.18	0.02		16.05

Tablo 4: Normal denklemler

h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8	h_9	$\frac{t}{\Delta}$
2.41	-1.90	1.00	-1.90	0.03	0.00	1.00	0.00	0.00	10.40
	5.63	-1.80	0.03	-1.74	0.07	0.00	1.00	0.00	19.22
		2.10	0.00	0.07	-1.89	0.00	0.00	0.00	7.22
			5.55	-1.93	1.00	-1.86	0.04	0.00	14.78
				8.27	-1.87	0.04	-1.89	0.03	14.74
					5.44	0.00	0.03	-1.90	13.13
						2.06	-1.89	1.00	5.40
							5.44	-1.90	13.07
								2.41	10.78

Çözüm vektörü

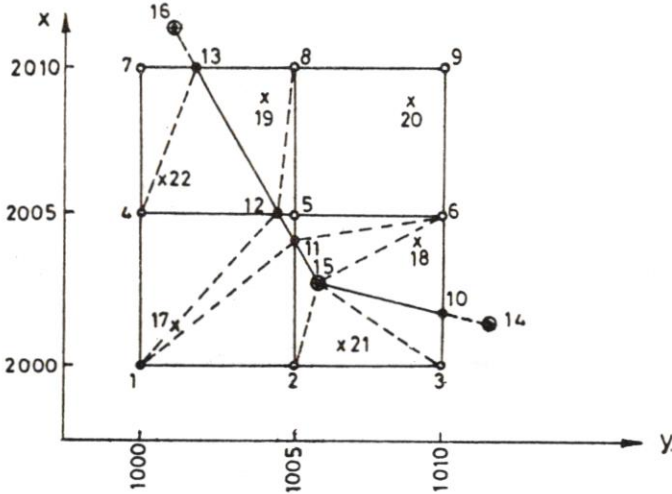
h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8	h_9
16.73	14.95	13.21	15.95	15.43	15.05	15.13	16.05	17.04



Şekil 5

Eğer arazideki kırık çizgilerin de belirlenmesi istenirse bu çizgilerin önceden tanımlanması ve bu çizgilerin grid kenarlarını kestiği noktaların belirlenip, lineer ve bilineer enterpolasyonun birleştirilerek yüzeyin oluşturulması gerekir.

Şekil 6'da 15, 15 ve 16 numaralı örnekleme noktaları arazideki kırıklığı gösteren çizgiyi oluşturmaktadır. 10, 11, 12, 13 numaralı noktalar ise bu çizginin grid kenarlarını kestiği noktaları göstermektedir. 17, 18, 19, 20, 21 numaralı noktalar ise hiçbir özellik taşımayan örnekleme noktalarıdır. Örnekleme noktalarının normlandırılmış koordinatları ve yükseklikleri ile arazideki kırıklığı gösteren çizginin grid kenarlarını kestiği noktaların normlandırılmış koordinatları tablo 5'te verilmiştir.



Şekil 6

No.	$\frac{y-1000}{5}$	$\frac{x-2000}{5}$	h
10	2.00	0.35	
11	1.00	0.69	
12	0.84	1.00	
13	0.31	2.00	
14	2.30	0.30	16.25
15	1.10	0.50	14.50
16	0.20	2.20	15.70
17	0.20	0.20	16.85
18	1.80	0.80	15.60
19	0.80	1.80	16.05
20	1.80	1.80	12.10
21	1.30	0.10	13.80
22	0.10	1.20	15.90

Tablo 5: Normlandırılmış koordinatlar

Eğrilik minimizasyonu için bir j noktasında herhangi bir çizgi için oluşturulacak imgesel düzeltme denklemleri,

$$v_{c,ijk} = \frac{1}{s_{ij}} h_i - \left(\frac{1}{s_{ij}} + \frac{1}{s_{jk}} \right) h_j + \frac{1}{s_{jk}} h_k = 0$$

biçimindedir. Burada s_{ij} , i ve j noktaları; s_{jk} , j ve k noktaları arasındaki normlandırılmış yatay uzunluktur. Üçgen elemanlarda bir P_{rk} örnekleme noktası için yazılacak düzeltme denklemleri (6) bağlantılarına göre,

	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8	h_9	h_{10}	h_{11}	h_{12}	h_{13}	h_{14}	h_{15}	h_{16}	1
1,2,3	1	-2	1														0
12,5,6					-7.25	1						6.25					0
13,8,9								-2.45	1				1.45				0
1,4,7	1			-2			1										0
11,5,8					-4.23			1			3.23						0
10,6,9						-2.54			1	1.54							0
14,10,15										-4.39				3.29	1.10		0
10,15,11										1.10						-5.75	0
15,11,12											-7.52	2.87				4.65	0
11,12,13											2.87	-3.75	0.88				0
12,13,16												0.88	-5.27			4.39	0
17	0.78										0.08	0.15					16.25
18						0.64				0.14					0.22		14.50
19								0.56				0.20	0.24				15.70
20					0.04	0.16		0.16	0.64								16.85
21		0.52	0.28												0.20		15.60
22				0.75								0.05	0.20				16.05
14														1			12.10
15															1		13.80
16																1	15.90

Tablo 7: Normal Denklemler

h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8	h_9	h_{10}	h_{11}	h_{12}	h_{13}	h_{14}	h_{15}	h_{16}	A^t
2.61	-2.00	1.00	-2.00			1.00				0.06	0.12					12.68
	4.27	-1.85												0.10		8.11
		1.08												0.06		4.37
			4.56			-2.00					0.04	0.15				12.04
				70.46	-7.24		-4.22	0.03		-13.66	-45.31					0.67
					7.89		0.03	-2.44	-3.82		6.25			0.14		11.98
						1.00										0.00
							7.34	-2.35		3.23	0.11	-3.42				11.49
								2.41	1.54			1.45				10.78
									22.87	5.12			-14.44	-11.12		2.03
										96.85	-32.33	2.53		-61.71		1.30
											62.20	-7.88		13.35	3.86	6.38
												30.75			-23.14	6.98
													11.82	3.62		12.10
														56.98		20.11
															20.27	15.90

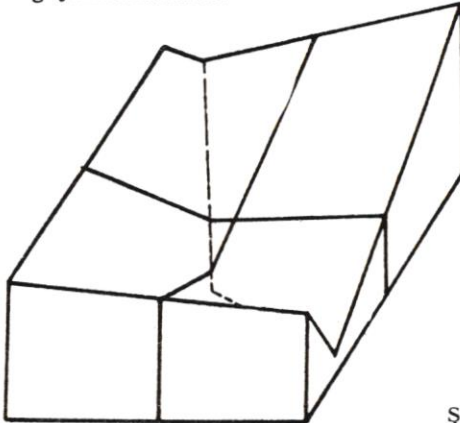
Çözüm vektörü

h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8	h_9	h_{10}	h_{11}	h_{12}	h_{13}	h_{14}	h_{15}	h_{16}
16.60	16.19	15.78	16.26	14.55	14.69	15.92	16.40	17.63	12.68	14.06	14.50	15.65	12.29	13.80	15.88

$$v_{rk} = \frac{1}{x_2 y_3 - x_3 y_2} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x_k + (x_3 - x_2)y_k] h_1 + (y_3 x_k - x_3 y_k) h_2 + (x_2 y_k - y_2 x_k) h_3 - h_k$$

olur. Burada x ve y , üçgenin 1 numaralı başlangıç noktasına göre kaydırılmış ve d uzunluğu ile normlandırılmış koordinatlarıdır. h_1, h_2, h_3 üçgenin köşe noktalarının, h_k ise üçgenin içine düşen P_{rk} örnekleme noktasının yüksekliğidir. Bilineer elemanlarda örnekleme noktaları için oluşturulacak düzeltme denklemleri daha önce gösterildiği gibidir.

Tablo 6, şekil 6'da verilen yüzeyin oluşturulması gerekli düzeltme denklemlerini göstermektedir. Tablo 7'de bu düzeltme denklemlerinden oluşturulan normal denklemler ve çözüm vektörü görülmektedir. Oluşturulan yüzey şekil 7'de görüldüğü gibi arazi eğimindeki kesikliliği yansıtmaktadır.



Şekil 7

6. SONUÇ

Parçalar boyunca eğriliklerin minimize edildiği parça parça bilineer enterpolasyonda oldukça düzgün yüzeyler oluşturulmaktadır. İstenirse arazi eğimindeki süreksizlikler (arazinin kırık çizgileri), parça parça düzlemlerle bilineer yüzeyler birlikte kullanılarak dikkate alınabilmektedir. Eşyükseklik eğrilerinin çizimi, hacim hesapları, vb. sayısal yükseklik modelleri uygulamaları için bu enterpolasyon yöntemi oldukça uygun görünmektedir.

Bu yöntem ile yüzey ($n*m$) sayıda grid noktasında oluşturulacaksa ($n*m$) bilinmeyenli normal denklem sisteminin çözülmesi gerekir. Çözümde, oluşan normal denklemler katsayılar matrisinin band yapısından ve boşluklarından yararlanılmazsa, böyle bir simetrik denklem sisteminin çözümü çok büyük bilgisayar sistemlerinin dahi bellek sırasını zorlayacak ve indirgeme işlemi çok zaman alacaktır. Enterpolasyonda, her enterpolasyon noktası çevresindeki sınırlı sayıda noktalarla bağlantılı olduğundan dolayı normal denklemler katsayılar matrisi ($2m + 3$) band genişliğinde, son derece boşluklu bir yapıda oluşur. Bu nedenle normal denklemler katsayılar matrisi, simetrik boşluklu matris algoritmalarından yararlanarak saklanmalı ve çözüm buna göre yapılmalıdır. Bu tür çözüm için "içiçe parçalara ayırma (nested dissection)", "minimum derece düzenleme (minimum degree ordering)" gibi yöntemler vardır.

KAYNAKÇA

- Ahlberg, J.H., Nilson, E.N., Walsh, J.L., 1967, "The Theory of Splines and Their Applications", Academic Press, London.
- Bosman, E.R., Eckhart, D., Kubik, K., 1971, "DELFT-A Programme System for Surface Approximation", Processing Department, Rijkswaterstaat, The Hague, The Netherlands.
- Cheung, Y.K., Yeo, M.F., 1979, "A Practical Introduction to Finite Element Analysis", Pitman Publishing Limited, London.
- Ebner, H., Hofmann, B., Reiss, P., Steidler, F., 1980, "HIFI-Ein Minicomputer-Programsystem für Höheninterpolation mit finiten Elementen", Zeitschrift für Vermessungswesen, Heft 5.
- Gökgöz, R., 1984, "Sayısal Arazi Modellerinde Sonlu Eleman Yöntemi ile Bilineer ve Bikübik Yüzey Enterpolasyonu", Karadeniz Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Trabzon.
- Güler, A., 1978, "Sayısal Arazi Modellerinde Enterpolasyon Yöntemleri, Harita Dergisi, Sayı 85.
- Güler, A., 1985, "Sayısal Arazi Modellerinde İki Enterpolasyon Yöntemi ile Denemeler", Harita ve Kadastro Mühendisliği Dergisi, Sayı 52-53.
- Reiss, P., 1985, "Aufbau digitaler Höhenmodelle auf der Grundlage einfacher finiter

Elemente", Dissertationen, Deutsche Geodatische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 315, München.

Stark, W., Steidler, F., 1983, "Sparse Matrix Algorithms to DEM Generation", Bull. Geod., Vol. 57, No. 1.

Sünkel, H., 1980, "A General Surface Representation Module Designed for Geodesy", Reports of the Department of Geodetic Science, Report No. 292, The Ohio State University, Columbus, Ohio.