JEODEZİK AĞLARIN GELİŞTİRİLMESİ (III. DERECE OPTİMİZASYON)

Doç. Dr. Tevfik AYAN
İ.T.Ü.

1- GİRİŞ

Jeodezik ağların geometrik yapılarının belirlenmesi, nirengi ağlarında olduğu gibi açı, kenar, azimut gibi değişik ölçü tiplerinin sayılarının ve bunların ağ içindeki dağılımlarının, ölçü elemanlarının doğruluklarının saptanması problemi, "Jeodezik Ağların Tasarımı" ya da "Jeodezik Ağların Dizaynı" olarak bilinmektedir.

Tasarım sırasında belirlenecek, yukarıda kısaca özetlenen parametrelerin bir kısmı ya arazi koşulları ya ekonomik koşullar, ya da elde mevcut jeodezik aletlerin ölçü presizyonları ile sınırlanır. Diğer yönden tasarlanması istenen ağın sınırları verilen bir doğruluğa ve güvenirliliğe ulaşması da amaçlanır.

Jeodezik ağ bir işletmeye tasarım da bir yatırıma benzetilerek, sınırlamalar içinde kalınmak koşulu ile amacı gerçekleştirmek üzere tasarım sırasında elde bulunan araç, malzeme, para, işgücü ve zamanın optimal olarak kullanılması, tasarım probleminin matematiksel optimizasyona konu edilmesiyle mümkün olur. Jeodezik ağların datum, geometrik yapı, ölçü doğrulukları gibi tasarım parametrelerinin belli kısıtlamalara ve amaç fonksiyonuna göre matematiksel optimizasyon yöntemleriyle belirlenmesi "Jeodezik Ağların Optimizasyonu" adını almaktadır (Ayan 1981).

Jeodezik ağlarda presizyonun yükseltilmesi amacına yönelik olarak ağın geometrik yapısı sonucu üzerindeki çalışmalar yeni değildir. (Schreiber (1882), Jordan (1888) jeodezik ağlarda en uygun ağırlık dağılımını, Helmert (1868) ekonomi sorununu araştırmışlardır. Ancak analitik çözümler çok kapsamlı hesaplamaları gerektirdiğinden, araştırmalar baz büyütme ağları gibi sınırlı bir alanda kalmıştır. Bilgisayar tekniklerindeki gelişmelerin sağladığı olanakla, nümerik metametik ve matematiksel optimizasyon yöntemlerindeki gelişmelere paralel olarak jeodezik operasyonların optimizasyonu, 1960'lı yıllarda yeniden gündeme gelmiş ve günümüze kadar önemli gelişmeler göstermiştir.

2- III. DERECE OPTİMİZASYON PROBLEMİNİN TANIMI

Jeodezik ağların tasarımı probleminde bazı tasarım parametreleri verilerek, bazı parametrelerin belirlenmesi istenebilir. Örneğin ağdaki en büyük değerdeki karesel ortalama nokta konum hatası ın en küçük olması istensin (amaç fonksiyonu). Bu ağ için öngörülen para ölçülerin belli sayıda tekrarına yeterli ise yani eldeki para ile ağda k sayıda dizi açı ölçmesi gerçekleştirilebilecekse, açı ölçmelerinde her bir noktadaki dizi sayısı (ölçü ağırlıkları)nın ne olması gerektiği bir optimizasyon problemidir ve matematiksel olarak

$$
\begin{aligned}
Z &= M_{P_{max}} \longrightarrow \min \\
\Sigma p_i &= k \qquad\qquad (2.1) \\
p_i &\geqslant o
\end{aligned}
$$

olarak ifade edilir. Bu optimizasyon probleminde ağın datumu ve geometrik yapısı belli kabul edilmekte yalnızca, amaç fonksiyonunu gerçekleştirecek ölçü ağırlıklarının belirlenmesi istenmektedir. Optimizasyon problemi bu örnektekinin tersine amaç fonksiyonu parametreleri ile kısıtlamaların parametreleri yer değiştirerek de ortaya konabilirdi. Bu durumda optimizasyon problemi

$$
\begin{aligned}
Z &= \Sigma p_i \dashrightarrow \min \\
M_{p_{max}} &= t \\
p_i &\geqslant o
\end{aligned}
\qquad (2.2)
$$

olurdu. Optimizasyonun 2.1 şekli ile belli bir maliyet için en presizyonlu ağ, 2.2 şeklinde ise belli bir presizyon için en ekonomik ağ aranmaktadır. Her iki durumda da belirlenmesi gereken tasarım parametresi ölçü tekrarlama sayıları ile ifade edilen ölçü ağırlıklarıdır.

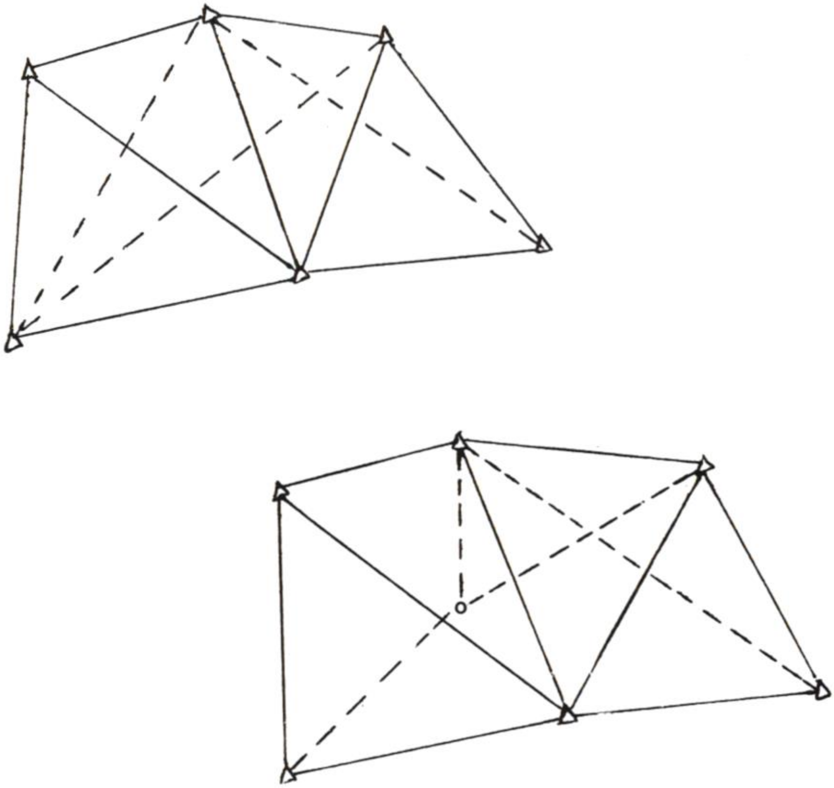
Grafarend (1979)'e göre jeodezik ağlarda optimizasyon problemi, belirlenmesi gereken tasarım parametrelerine göre dört gruba ayrılmaktadır.

Ağ noktalarının koordinatları veya bunların fonksiyonuna ilişkin değer yargılarından türetilecek bir amaç fonksiyonunun gerçekleşmesi için, ağın datumunun nasıl belirlenmesi gerektiği sorusu 0. derece optimizasyon adını alır. Problemin bu şeklinde ölçü ağırlıkları ile ağın geometrik yapısı ağın verileridir ve problem içinde değişmez. I. derece optimizasyonda ağın datumu ve ölçü ağırlıkları sabit tutularak amaç fonksiyonunu gerçekleştirecek geometrik yapının belirlenmesi istenir; diğer bir anlatımla problemin bilinmeyeni dizayn matrisi adı da verilen düzeltme denklemleri katsayılar matrisidir. Ölçü ağırlıklarının optimal dağılımı problemi ise II. derece optimizasyon adını almaktadır. Kısıtlamalara göre ya presizyon optimizasyonu ya da maliyet optimizasyonu olarak ortaya çıkabilir.

Belli amaçlara uygun olmayan bir ağın yeniden ortaya konan bir amaç fonksiyonunu sağlayacak biçimde geliştirilmesi, yani ağın iyileştirilmesi problemine ise III. derece optimizasyon denilmektedir. Bu optimizasyon türünde tasarım parametrelerinin bazıları kısmen belirsizdir. Buna göre III. derece optimizasyon problemi

a) Ağın geometrik yapısı ağa yeni ölçüler katılarak değiştirilir. Problemin hangi ölçülerin ağa katılması gerektiğini bulmaktır. (Ölçü planının optimal hale getirilmesi.) Bu durumda belirlenmesi istenen tasarım parametresi A dizayn matrisinin bir kısmıdır (Şekil 2.1).

b) Ağın geometrik yapısı ağın yeni noktalar katılarak değiştirilebilir. Bu durumda problem ağa katılacak noktaların yerlerinin belirlenmesidir. Bu durumda da belirlenmesi istenen tasarım parametresi A dizayn matrisinin bir kısmı (Şekil 2.2) ile X bilinmeyenler vektörüdür.



Şekil 2.1- Bir ağın ek ölçülerle veya ek noktalarla geliştirilmesi

c) Ağın geometrik yapısı hem ek noktalar hem de ek ölçülerle değiştirilebilir, yani (a) ve (b) birlikte düşünülebilir.

d) Ağa eklenecek ölçülerin hangi presizyonda yapılması gerektiği aranıyorsa, hem şekil hem de ağırlık optimizasyonu birlikte düşünülebilir (Ayan 1985). Bu durumda optimizasyon probleminin çözümü aşamalı olarak gerçekleştirilir.

3- III. DERECE OPTİMİZASYONUN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

3.1- Simülasyon Yöntemleri

Üçüncü derece optimizasyon hem şekil hem de ağırlık optimizasyonu (I. ve II. derece optimizasyon) problemlerini kısmen veya her ikisinden de birer kısım birlikte içerdiğinden birinci ve ikinci derece optimizasyon için önerilen çözüm yöntemleri III. derece optimizasyon için de geçerli olmaktadır. Bu nedenle jeodezik ağların tasarımı sırasında çok sık başvurulan ve çoğunlukla skaler amaç fonksiyonlarının söz konusu olması durumunda kullanılan simülasyon yöntemleri nirengi ağlarının geliştirilmesinde de kullanılabilir.

Bu yöntemde ağda uygulanması mümkün olabilecek tüm ölçülerden oluşan bir ölçü planından hareket edilir. Ölçüler sıra ile teker teker ölçü planından çıkarılarak her defasında terkedilen ölçünün amaç fonksiyonuna etkisi hesaplanır. Bütün ölçülerin birer kez ölçü planından çıkarılması sonucunda amaç fonksiyonuna en az etkiyen, örneğin kendisinin ölçü planından çıkarılmasıyla en az presizyon kaybı meydana gelecek ölçü planından kesin olarak çıkarılır. Böylece ağda bir ölçü azaltılmış diğer bir anlatımla ağ bir ölçü indirgenmiş olur. Aynı şekilde indirgemeye devam edilerek amaç fonksiyonu için sınır değere yaklaşılır. Problemin aynı yöntemle çözümü için tersine bir yol da izlenebilir, yani ölçülerin teker teker çıkarılması yerine bir temel şekilden hareket edilerek, amaç fonksiyonunu gerçekleştirme doğrultusunda katkısı en çok olan ölçüden başlayarak, amaç fonksiyonu gerçekleşinceye kadar, ölçülerin teker teker ölçü planına katılması yolu izlenebilir. Jeodezik ağların tasarımı için yazılmış programlar da vardır. Conzett (1981) tarafından yazılan INTRA program sistemi ile Mepham (1984) tarafından geliştirilen CANDSN (Computer Aided Network DeSigN) ile Gründig ve Bahndort (1984) tarafından geliştirilen amaç fonksiyonları içinde güvenirlilik ölçütlerinin de yer aldığı program sistemi OPTUN bu alandaki çalışmalara örnek gösterilebilir.

Ağ tasarımı için yukarıda açıklanan yöntemde, her bir ölçünün ağa eklenmesinden, ya da çıkarılmasından sonra hesabın yenilenmesi, uzun bilgisayar zamanına gereksinim göstermektedir. Oysa III. derece optimizasyonda ağın bir kısmı mevcut olduğundan, hesap hacmini küçültecek önlemler alınabilir. Bunun için ağ eski ve yeni ölçüler olmak üzere iki kısımda düşünülür. Ağa yeni eklenecek noktaların koordinat bilinmeyenleri x_3 (n_3 sayıda) ağda eskiden mevcut olan ve fakat yeni noktalarla bağlantılı olmayan noktalarına ilişkin koordinat bilinmeyenleri x_1 (n_1 sayıda) ve eski ağın yeni noktalarla bağlantısını sağlayan noktalarına ilişkin koordinat bilinmeyenleri x_2 (n_2 sayıda) gösterilirse, l_1 ağın eskiden mevcut ölçüleri (m_1 sayıda) l_2 de ağa eklenen yeni ölçüleri (m_2 sayıda) göstermek üzere, ağın eski ve yeni ölçülerle birlikte dengelenmesi için fonksiyonel modeli

$$
\begin{aligned}
\underline{l}_1 + \underline{v}_1 &= \underline{A}_{11}\underline{x}_1 + \underline{A}_{12}\underline{x}_2 + \underline{0}\underline{x}_3 \\
\underline{l}_2 + \underline{v}_2 &= \underline{0}\underline{x}_1 + \underline{A}_{22}\underline{x}_2 + \underline{A}_{23}\underline{x}_3
\end{aligned}
\tag{31.1}
$$

ve sotokastik modeli

$$
\underline{P} = \begin{bmatrix} \underline{P}_1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{P}_2 \end{bmatrix}
\tag{31.2}
$$

olur. Buradan elde edilecek normal denklemler katsayılar matrisi

$$
N = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11}\,\underline{P}_1\,\underline{A}_{11} & \underline{A}_{11}\,\underline{P}_1\,\underline{A}_{12} & \underline{0} \\ \underline{A}_{12}\,\underline{P}_1\,\underline{A}_{11} & \underline{A}_{12}\,\underline{P}_1\,\underline{A}_{12} + \underline{A}_{22}\,\underline{P}_2\,\underline{A}_{22} & \underline{A}_{22}\,\underline{P}_2\,\underline{A}_{23} \\ \underline{0} & \underline{A}_{23}\,\underline{P}_2\,\underline{A}_{22} & \underline{A}_{23}\,\underline{P}_2\,\underline{A}_{23} \end{bmatrix}
$$

olur. Ağ indirgemesinin her aşamasında N matrisinin inversiyonu yerine, $\underline{N}$ matrisi

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} \underline{N}_{11} & \underline{N}_{12} \\ \underline{N}^T_{12} & \underline{N}_{22} \end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrisler halinde düşünülerek,

$$\underline{N}_{11} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11}\,\underline{P}_1\,\underline{A}_{11} & \underline{A}_{11}\,\underline{P}_1\,\underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{12}\,\underline{P}_1\,\underline{A}_{11} & \underline{A}_{12}\,\underline{P}_1\,\underline{A}_{12} + \underline{A}_{22}\,\underline{P}_2\,\underline{A}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\underline{N}_{12} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{A}_{22}\,\underline{P}_2\,\underline{A}_{23} \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{N}_{22} = \underline{A}_{23}\,\underline{P}_2\,\underline{A}_{23}$$

olmak üzere, $\underline{N}_{11}$ de

$$\underline{N}_{11} = \underline{N}_1 + \underline{\Delta N}_1 = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11}\,\underline{P}_1\,\underline{A}_{11} & \underline{A}_{11}\,\underline{P}_1\,\underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{12}\,\underline{P}_1\,\underline{A}_{11} & \underline{A}_{12}\,\underline{P}_1\,\underline{A}_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{A}_{22}\,\underline{P}_2\,\underline{A}_{22} \end{bmatrix} \tag{31.4}$$

iki matris toplamı şekline getirilebilir. 31.4'ün sağ tarafındaki birinci terim, eski ağ noktalarının eski ağ ölçüleriyle ve bunların ağırlıkları ile dengelemesinde elde edilen normal denklem katsayılar matrisidir.

$$\underline{\Delta N}_1 = \underline{B}'\,\underline{P}_2\,\underline{B} \quad ; \quad \underline{B} = [\,\underline{0} \;\vdots\; \underline{A}_{22}\,]$$

ile

$$\underline{N}_{11} = \underline{N}_1 + \underline{B}'\,\underline{P}_2\,\underline{B}$$

ve $\underline{N}_{11}$ in Cayley inversi önceden bilinen $\underline{N}_1$ matrisi yardımıyla

$$\underline{N}_{11}^{-1} = \underline{N}_1^{-1} - \underline{N}_1^{-1}\underline{B}'\,(\underline{P}_2^{-1} + \underline{B}\underline{N}_1\,\underline{B}')^{-1}\,\underline{B}\underline{N}_1^{-1} \tag{31.5}$$

olarak hesaplanabilir (İllner 1986). Buradan tüm normal denklem katsayılar matrisi $\underline{N}$ in inversi ise Wolf (1975, s. 300)'a göre

$$\underline{N}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{N}_{11} & \underline{N}_{12} \\ \underline{N}_{12} & \underline{N}_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{Q}_{11} & \underline{Q}_{12} \\ \underline{Q}_{12} & \underline{Q}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{Q}_{22} &= (\underline{N}_{22} - \underline{N}'_{12}\, \underline{N}_{11}^{-1}\, \underline{N}_{12})^{-1} \\ \underline{Q}_{11} &= \underline{N}_{11}^{-1} + \underline{N}_{11}^{-1}\, \underline{N}_{12}\, \underline{Q}_{22}\, \underline{N}'_{12}\, \underline{N}_{11}^{-1} \\ \underline{Q}_{12} &= -\underline{N}_{11}^{-1}\, \underline{N}_{12}\, \underline{Q}_{22} \\ \underline{Q}_{12} &= -\underline{Q}_{22}\, \underline{N}'_{12}\, \underline{N}_{11}^{-1} \end{aligned} \tag{31.6}$$

olacağından $N = N_{11}$ olur. Ağa bir tek ölçü eklendiği varsayılırsa bu durumda

$$\underline{N}_{11} = \underline{N}_1 + \underline{N}_1 = \underline{N}_1 + \underline{b}\ p_2 \underline{b}'$$

ile

$$\underline{N}_{11}^{-1} = \underline{N}_1^{-1} - \underline{N}_1^{-1} \underline{b}\, (\frac{1}{p_2} + \underline{b}'\, \underline{N}_1^{-1} \underline{b})^{-1}\, \underline{b}' \underline{N}_1^{-1} \tag{31.7}$$

elde edilecektir. 31.7 bağıntısı ağa ölçülerin teker teker eklenmesi sırasında kullanılabilecek bir bağıntıdır. Ağdan ölçüler teker teker çıkarılarak her defasında invers hesaplanması gerektiğinde (ağ indirgemesi) $\underline{N}_{11}^{-1}$ den $\underline{N}_1^{-1}$ in hesaplanması söz konusu olur. Bunun için de

$$\underline{N}_1 = \underline{N}_{11}^{-1} + \underline{N}_{11}^{-1}\, \underline{B}'\, (p_2^{-1} - \underline{B}\, \underline{N}_{11}^{-1}\, \underline{B}')^{-1}\, \underline{B}\, \underline{N}_{11}^{-1} \tag{31.8}$$

ve $A_{23} = 0$ olması durumunda da

$$\underline{N}_1^{-1} = \underline{N}_{11}^{-1} + \frac{p_2}{p_2\, \underline{b}'\, \underline{N}_{11}^{-1}\, \underline{b}}\ \underline{N}_{11}^{-1}\, b\, b'\, \underline{N}_{11}^{-1} \tag{31.9}$$

bağıntıları verilmektedir (Illner 1986).

31.1 eşitliklerinden başlayarak yukarıda açıklanan yöntemde ağın eski noktaları nın hem koordinatları hem de doğruluk ölçütleri değiştiği için, dinamik ağ kavramından esinlenilerek yöntem III. derece optimizasyonun dinamik modeli olarak adlandırılmıştır. Buna karşılık ağda eski noktaların koordinatları değişmez alınırsa yani tasarım yalnızca ağ sıklaştırmasından ibaret ise, bağlantılı ağ dengelemesi ard arda uygulanacak demektir. Bu durumda da III. derece optimizasyonun hiyerarşik modelinden söz edilmektedir (Illner, 1986).

3.2- Ölçüt Matrisleriyle III. Derece Optimizasyon

Ölçüt matrisleri ile optimizasyon denilince daha çok ikinci derece optimizasyon akla gelmektedir. Ancak ölçü ağırlıklarına kısıtlama koymadan gerçekleştirilecek ikinci derece optimizasyondan elde edilecek ölçü ağırlıkları incelenerek sıfıra yakın ağırlıklı ölçülerin terkedilmesiyle optimal ölçü planının sağlanması da mümkün olmaktadır (Schmitt 1979). Bu nedenle ölçüt matrisleri ile optimizasyon hem birinci hem de ikinci derece için kullanılabilen etkin bir yöntemdir.

Ölçüt matrisleriyle optimizasyonun dayandığı ana fikir aşağıdaki gibi açıklanabilir. Tasarlanacak ağın varyans-kovaryans matrisinin ideal bir matrise yaklaşması istenebilir. Bu ideal matris ağdaki bilinmeyenlerin (koordinatlar, yükseklikler... gibi) ve/veya bunların fonksiyonlarının hata ilişkilerini karakterize eder ve bu matrisin elemanları bilinmeyenler arasında istatistik anlamda korelasyonu temsil eder.

Normal denklemler matrisi, ölçüt matrisinin inversine eşit yazılarak

$$\underline{A}'\,\underline{P}\underline{A} = \underline{Q}_x^{+} \tag{32.1}$$

ifadesinden, ölçü ağırlıkları için

$$(\underline{A}'\,\Theta\underline{A}')\,\underline{p} = \underline{q} \tag{32.2}$$

denklemi elde edilir; burada p 32.1'deki gibi bir köşegen matris değil, bir vektördür; keza

$$\underline{q} = \mathrm{vec}\ \underline{Q}_x^{+}$$

geçerlidir. 32.2'den p nin çözümü $(\underline{A}'\,\Theta\underline{A}')$ khatri-Rao çarpımının satır sayısına bağlı olmakla birlikte, serbest ağlarda bu satır sayısının p bilinmeyenleri sayısından daha çok olduğu söylenebilir. Böylece en küçük kareler çözümü için

$$(\underline{A}'\,\Theta\underline{A}')\,\underline{p} = \underline{q} + \underline{r}$$

$$r'\,r = \min$$

ile

$$(\underline{A}'\,\Theta\underline{A}')'\,(\underline{A}'\,\Theta\underline{A}')\,\underline{p} - (\underline{A}'\,\Theta\underline{A}')\,\underline{q} = \underline{0} \tag{32.3}$$

olur ve Khatri-Rao çarpımlarının çarpımı yerine Hadamart çarpımı konarak 32.3 eşitliği

$$(\underline{A}\underline{A}' \star \underline{A}\underline{A}')\,\underline{p} - (\underline{A}'\,\Theta\underline{A}')\,\underline{q} = \underline{0} \tag{32.4}$$

elde edilir (Müller-Schmitt 1985). Dizayn matrisi A 31.1'e uygun olarak alt matrislere ayrılırsa, çözülmesi gereken denklem sistemi

$$\begin{bmatrix} \underline{A}_1\underline{A}_1' \star \underline{A}_1\underline{A}_1' & \underline{A}_{11}\,\underline{A}_{22} \star \underline{A}_{12}\,\underline{A}_{22} \\ \underline{A}_{22}\,\underline{A}_{12}' \star \underline{A}_{22}\,\underline{A}_{12}' & \underline{A}_2\,\underline{A}_2' \star \underline{A}_2\,\underline{A}_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{p}_1 \\ \underline{p}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\underline{A}_1'\ 0\ \underline{A}_1')'\underline{q}_{1/2} \\ (\underline{A}_2'\ 0\ \underline{A}_2')'\,\underline{q}_{2/3} \end{bmatrix} = 0 \tag{32.5}$$

olur; burada

$$\underline{A}_1 = [\underline{I}, \underline{0}] \begin{vmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{A}_{22} & \underline{A}_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} \end{vmatrix} = [\underline{A}_{12}, \underline{A}_{12}]$$

$$\underline{A}_2 = [\underline{0}, \underline{I}] \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{A}_{22} & \underline{A}_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} = [\underline{A}_{22}, \underline{A}_{23}]$$

anlamında olup,

$$\underline{q}_{1/2} = \text{vec}\, \underline{Q}^+_{1/2} = [\,[I : 0] \otimes [I \vdots 0]\,]\ \text{vec}\, \underline{Q}^+_{1/2/3}$$

$$\underline{q}_{2/3} = \text{vec}\, \underline{Q}^+_{2/3} = [\,[I \quad 0] \otimes [I \vdots 0]\,]\ \text{vec}\, \underline{Q}^+_{1/2/3}$$

dır.

Eğer ağa yeni nokta katılmadan, ağ ek ölçülerle iyileştirilecekse 32.5 ifadesinde $\underline{A}_{23} = \underline{0}$ ve bununla da $\underline{A}_2 = \underline{A}_{22}$ olur.

Yukarıda açıklanan ölçüt matrisleriyle üçüncü derece optimizasyonda sonuç olarak elde edilen ağırlık bilinmeyenleri hem eski ağa ait ölçülere, hem de ek ölçülere ilişkin ağırlıklardır, yani eski ölçüler için de yeni ağırlıklar hesaplanmıştır. Bu nedenle izlenen hesap yolu, dinamik ağ kavramına benzetilerek "dinamik model" olarak adlandırılmıştır. Buna karşılık optimizasyon problemi ileri sürülürken ağın eski ölçülerine ilişkin ağırlıklarının değişmemesi istenebilir. Bu durumda ölçüt matrisleriyle III. derece optimizasyonun "statik model"inden söz edilir. Problemin bu şekliyle çözümü için izlenecek yol, 32.2 sistemine p_1 ağırlık matrisinin değişmeyeceğini ifade eden koşulların eklenmesidir. Mevcut ölçülerin ağırlıkları $\widetilde{p}_1$ ile gösterilirse matematik model

$$(\underline{A}' \odot \underline{A})\underline{p} = \underline{q}_{1/2/3}$$

$$[\underline{I} \vdots \underline{0}]\,\underline{p} = \widetilde{\underline{p}}_1$$

olur. Buradan p_2 bilinmeyenine göre

$$(\underline{A}_2 \underline{A}_2) \star \underline{A}_2 \underline{A}_2')\, \underline{p}_2 - (\underline{A}_2' \,\dot{\theta}\, \underline{A}_2')\, \underline{q}_{2/3} + (\underline{A}_{22} \underline{A}_{12} \star \underline{A}_{22} \underline{A}_{12}')\, \underline{p}_1 = \underline{0} \tag{32.7}$$

matris denklemi elde edilir (Illner 1986).

4- SONUÇ

Eskiden kurulmuş, günümüz gereksinimlerine cevap vermeyen jeodezik ağların iyileştirilmesi ve ağ sıklaştırma probleminde presizyon artırıcı önlemler için iki yol vardır. Bunlardan biri simülasyon yöntemleri, diğeri ise analitik çözümdür. Her iki yöntemde de 3. derece optimizasyon problemine özgü özel durumlar vardır. Bu özel durumlar göz önüne alındığında hesap işlemleri oldukça azalmaktadır. Yukarıda hem çözüm yöntemleri tanıtılmakta, hem de bazı özel durumlara işaret edilmektedir.

KAYNAKÇA

Ayan, T. (1981), Jeodezik Ağların Optimizasyonu, Doçentlik Tezi, İstanbul

Ayan, T. (1985), Nirengi Ağlarının Tasarımı ve Optimizasyonu, Ülke Nirengi Ağları ve Türkiye Nirengi Ağı Konferanslar Dizisi, 27 Mart / 22 Mayıs 1985, Yıldız Üniversitesi

Conzett, R. - Frank, A. (1981), İnteraktive Triangulasyon in, VIII. int. Kurs für ingenieurvermessung Dümmler Verlag - Bonn

Grafarend, E. - Heister, H. - Kelm, R. - Kropff, H. - Schaffrin, H. (1979), Optimierung geodaetischer messoperationen Wichmann Verlag - Karlsruhe

Gründig, L. - Bahndorf, J. (1984), Optimale planung und Analyse von 2 and 3 dimensionalen geodaetischen Netzen in, Beitraege zum IX. Int. Kurs für ingenieurvermessung, Dümmler Verlag-Bonn

Illner, M. (1986), Anlage und Optimierung von Verdichtungsnetzen DGK Reihe C Nr. 317.

Meplam, M.P. - Krakivsky, E.J. (1982), Interactive Network Design and Analysis in, DGK, Reihe B Nr. 258/III

Müller, H. - Schmitt, G. (1985), SODES 2 ein programsystem zur Gewichtsoptimierung zweidimensionaler geodaetischer Netze, DGK Reihe B Nr. 276

Schmitt, G. (1979), Zur Numerik des Designs zweiter ordnung DGK Reihe C Nr. 256.

Ek 1 : Metinde geçen bazı matris çarpımlarının bir örnekle açıklanması

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2,3} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}_{3,3}$$

Kronoker çarpımı "⊗"

$$(\underline{A} \otimes \underline{B}) = \begin{bmatrix} a_{11}\underline{B} & a_{12}\underline{B} & a_{13}\underline{B} \\ a_{21}\underline{B} & a_{22}\underline{B} & a_{23}\underline{B} \end{bmatrix}_{6,9}$$

Khatri-Rao çarpımı "Θ"

$$\underline{A} = [\underline{a}_1, \underline{a}_2 \,.\,.\,.\,.\,.\, \underline{a}_k] \;;\; \underline{B} = [\underline{b}_1, \underline{b}_2 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\, \underline{b}_k]$$

$$\underline{A} \,\Theta\, \underline{B} = [\underline{a}_1 \otimes \underline{b}_1, \underline{a}_2 \otimes \underline{b}_2, \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, \underline{a}_k \otimes \underline{b}_k]$$

$$
\underline{A} \odot \underline{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} & a_{12}\begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix} & a_{13}\begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix} \\ a_{21}\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} & a_{22}\begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix} & a_{23}\begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{6,3}
$$

Hadamart çarpımı: "★ "

Eşit boyutlu matrislerin Hadamart çarpımı mümkün olur.

$$
\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2,3} \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}_{2,3}
$$

$$
\underline{A} \star \underline{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\,b_{11} & a_{12}\,b_{12} & a_{13}\,b_{13} \\ a_{21}\,b_{21} & a_{22}\,b_{22} & a_{23}\,b_{23} \end{bmatrix}_{2,3}
$$