S-TRANSFORMASYONU VE DEFORMASYON ANALİZİ

Doç. Dr. Hüseyin DEMİREL
Yıldız Üniversitesi

ÖZET

Jeodezik ağlarda datum problemi, çözüm olanakları ve S-transformasyonu üzerinde durulmakta ve S-transformasyonu geometrik deformasyon analizine uygulanmaktadır.

1- GİRİŞ

Mühendislik yapılarında ve yeryüzünün belli bir bölümünde hareketleri araştırmak amacıyla jeodezik kontrol ağları oluşturulur. Değişik zamanlarda belli elemanları ölçülen ağların datumları çeşitli nedenlerle farklı olabilmektedir. Karşılaştırılacak parametreler, örneğin ağ noktalarının koordinatları aynı bir datumda belirlenmiş olmalıdır. S-(similarity)-transformasyonları yardımıyla değişik peryotlar arasında datum birliği sağlanabilir. Ayrıca bu transformasyon art arda uygulanarak hareketli noktalar saptanabilir.

S-transformasyonu, yeni bir dengelemeye gerek olmadan bir datumdan bir başkasına geçme, başka bir deyişle herhangi bir datumda belirlenmiş bilinmeyen parametreleri, örneğin nokta koordinatlarını ve bunların kofaktörler matrisini belli bir datuma dönüştürme işlemidir. S-transformasyonu, tüm ağ noktalarının ya da bir bölümünün (datum noktalarının) küçültülmüş koordinat bilinmeyenlerinin kareleri toplamının minimum olmasını öngören serbest dengeleme ile eş anlamlıdır.

Deformasyon analizleri dışında başka alanlarda da datum problemi ve datum transformasyonları ile karşılaşılır. Duyarlık ölçütleri genellikle datuma bağlıdır. Duyarlık açısından ağların karşılaştırılmaları gerektiğinde bunların, örneğin S-transformasyonu ile aynı bir datuma dönüştürülmeleri gerekir.

Bir kontrol ağının duyarlık beklentilerini sağlayıp sağlamadığını belirlemek amacıyla koordinat bilinmeyenlerinin varyans-kovaryans matrisi öngörülen ve ölçüt matrisi adı verilen yapay bir kovaryans matris ile karşılaştırılır. Bu karşılaştırma için, tanımlanan bir datumu olmayan ölçüt matrisi S-transformasyonu yardımıyla ağın datum sistemine dönüştürülür.

Ülke ölçmelerinde de datum problemiyle karşılaşılır. Ağ sıklaştırmalarında bağlantı noktalarının olumsuz etkilerinden bağımsız olarak, duyarlık ve güvenirliliği belirlemek, uyuşumsuz ölçüleri ayıklamak ve bağlantı noktalarının uygun olup olmadığını test etmek amacıyla yeni ve bağlantı noktalarından oluşan ağ bölümü genellikle serbest dengelenir. Üst dereceli noktalara bağlantı ikinci adımda gerçekleştirilir (Koch, 1983). İkinci adımda S-transformasyonu yardımıyla mevcut ağın zorlamasız bazına geçilebilir.

2- DATUM BELİRLEME

2.1- Datum Problemi ve Çözüm Olanakları

Bir jeodezik ağ, uygun ölçülerle birbirine bağlanan noktalardan oluşur. Yalnızca klasik ölçme yöntemlerinin uygulandığı düşünülürse 1 boyutlu nivelman ağlarında yükseklik farkları ve gravite ağlarında gravite farkları, 2 boyutlu konum ağlarında doğrultular ve kanarlar, 3 boyutlu ağlarda doğrultular, kenarlar ve başucu açıları ölçülür. Aranan büyüklükler ağ noktalarının yükseklikleri, gravite değerleri veya iki ya da üç boyutlu koordinatları (bilinmeyen parametreler)dir. Ölçü sayısı bilinmeyen sayısından daha büyüktür. Genellikle uygulanan Gauss-Markov modelinde dengeleme için, ölçülerle aranan büyüklükler arasında fonksiyonel ilişkiler (düzeltme denklemleri) yazılır. Doğrusallaştırma işleminden sonra 1 küçültülmüş ölçüler vektörü, v düzeltmeler vektörü, A katsayılar matrisi, x küçültülmüş bilinmeyenler vektörü ve C_{11} ölçülerin varyans-kovaryans matrisi, Q_{11} ağırlık katsayıları matrisi ya da $P = Q_{11}^{-1}$ ölçülerin ağırlık matrisi olmak üzere

$$1 + v = A\,x \tag{2.1a}$$

$$C_{11} = \sigma_0^2\, Q_{11} \tag{2.1b}$$

dengeleme modelinden (σ_0^2 bilinmeyen varyans faktörü)

$$N = A^T P A\,,\ n = A^T P\, 1 \text{ ile}$$

$$N\,x = n \tag{2.2}$$

normal denklemleri elde edilir.

Ölçüler yalnızca ağ noktalarının karşılıklı konumunu, başka bir deyişle iç geometrisini belirler. Ölçüler, örneğin tek boyutlu ağlarda bir referans yüzeyi veya iki ya da üç boyutlu ağlarda bir koordinat sistemiyle bağlantı için gerekli bilgiyi içermez. Bunun sonucu olarak A katsayılar matrisi ve bilinmeyen parametre sayısı u ise u × u boyutlu normal denklem katsayılar matrisi N tekil (det N = 0) olur. N matrisinin rangı rg N = r ile gösterilirse d = u − r farkına rank ya da datum defekti denir. d sayıda "serbest datum parametreleriyle" iç ağ geometrisinin bir koordinat sisteminde hareket olanakları tanımlanır.

Datum defektinin büyüklüğü ağın boyutuna ve ağda gözlenen elemanlara bağlıdır. Örneğin yükseklik farkları ölçülen nivelman ağlarında defekt sayısı d = 1, serbest datum parametresi 1 ötelemedir. 2 boyutlu bir konum ağında yalnızca kenarlar ya da kenarlar ve doğrultular ölçülmüşse d = 3, serbest datum parametreleri 1 dönüklük, x ve y eksenleri yönünde 2 ötelemedir. Yalnızca doğrultular gözlenmişse bir ölçek faktörünün de eklenmesiyle d = 4 olur.

Bir jeodezik ağın ölçüler yardımıyla belirlenen göreli konumu ile bir koordinat sistemi arasında bağlantı kurma işlemi ya da (2.2) normal denklemlerinin çözümü datum problemini oluşturur. Çözüm için örneğin konum ağlarında noktaların küçültülmüş koordinat bilinmeyenlerinin kareleri toplamının minimum olması öngörülerek serbest dengeleme yapılır. Minimum koşulu ağın tüm noktalarını içeriyorsa koordinat bilinmeyenlerine ilişkin ağırlık katsayıları matrisinin izi de minimum olur. Minumum koşulu, defekt sayısından az olmamak üzere ağ noktalarından bir bölümüne ilişkin koordinat bilinmeyenini içeriyorsa ağırlık katsayıları matrisinin yalnızca bunlara karşılık bölümünün izi minimum olur. Bu anlamda serbest dengelemelere "tüm iz minimum" ve "kısmi iz minimum" çözümleri de denir (Illner, 1985). Minimum koşulu defekt sayısı kadar koordinat bilinmeyeni için yazıldığında çözüm, defekt sayısı kadar parametrenin sabit alındığı klasik dengelemeye dönüşür.

Serbest dengeleme türlerinde ağın iç geometrisi; dengelenmiş ölçüler ve bunların karesel ortalama hataları aynı kalır. Yalnızca koordinat bilinmeyenleri ve bunların kofaktörler matrisi datum noktalarının (min koşuluna giren noktaların) seçimine bağlı olarak değişir.

Defekt sayısından daha çok sayıda parametrenin sabit geçtiği sıklaştırma ağlarında ağın iç geometrisi bağlantı noktalarına göre belirlendiğinden bir zorlanma söz konusudur. A matrisinde sabit nokta koordinatlarına karşılık sütunlar çizildiğinden normal denklem katsayılar matrisi $\underline{N}$ regulerdir. Bu anlamda "zorlamalı dengeleme" yukarıda açıklanan "serbest dengeleme" kavramından farklıdır.

Tüm serbest dengeleme sonuçları S-transformasyonu ile birbirine dönüştürülebilir, başka bir deyişle yeni bir dengelemeye gerek olmadan bir datumdan istenen başka bir datuma geçilebilir. Bu yüzden serbest dengelemelere S-sisteminde dengeleme de denir. Zorlamalı dengeleme bir S-sistemi değildir (Niemeier, 1985a).

2.2- Datum Tanımları

(2.2) normal denklemlerinin çözümü için değişik yollardan birinde katsayılar matrisi N, bir B matrisiyle genişletilerek reguler yapılar. Bu çözüm,

$$v = A\,x - 1 \qquad (2.3)$$

$$B^T x = o$$

sistemine karşılıktır (Gauss-Markov modelinde koşullu dengeleme). Lagrange fonksiyonu minimum yapılarak

$$\begin{bmatrix} N & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_b \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ o \end{bmatrix} \qquad (2.4)$$

normal denklemleri elde edilir. Burada x_b, x bilinmeyenler vektörünün B matrisine bağlı tahmin değeri, k korelatlar anlamındadır. Sütun sayısı defekt sayısına eşit olan B matrisi

$$A\,G = 0 \ \text{ve}\ N\,G = 0 \qquad (2.5)$$

koşullarını sağlayan G matrisinden dönüştürülür. G matrisi, normal denklem katsayılar matrisi N'nin d sayıda $\lambda = 0$ öz değerlerine karşılık öz vektörler matrisidir. Örneğin defekt sayısı d = 4 olan p noktalı bir doğrultu ağında x_{io}, y_{io} (i = 1, p) yaklaşık koordinat değerleri olmak üzere G için

$$G^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ -y_{10} & x_{10} & -y_{20} & x_{20} & \dots & -y_{po} & x_{po} \\ x_{10} & y_{10} & x_{20} & y_{20} & \dots & x_{po} & y_{po} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{x yönünde öteleme} \\ \text{y yönünde öteleme} \\ \text{dönüklük} \\ \text{ölçek faktörü} \end{array}$$

öz vektörler matrisi geçerlidir. Ağda en azından bir kenar ölçülmüşse G^Tnin son satırı ortadan kalkar. Nivelman ağlarında (d = 1)

$G^T = [1 \quad 1 \quad . \quad . \quad . \quad 1]$ dir.

E matrisi köşegeni üzerinde datumu belirleyen nokta koordinatlarına karşılık "1", ötekiler için "0" değerlerini içeren bir köşegen matris olmak üzere B matrisi

$$B = EG \tag{2.6}$$

eşitliğiyle tanımlanır. G ve B aynı boyutlu sütun reguler matrisler olduğundan bunların G^TB çarpımı reguler bir kare matristir. Ayrıca (2.5) eşitlikleri göz önünde tutulursa (2.4) normal denklemlerinin çözümü için

$$\begin{bmatrix} N & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Q_b & G(B^TG)^{-1} \\ (G^TB)^{-1}G^T & 0 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

çıkar (Koch, 1980). Q_b için

$$N\,Q_b = 1 - B(G^TB)^{-1}\,G^T \qquad (I = \text{birim matris}) \tag{2.8}$$

ya da bunun genişletilmişi

$$Q_b = (N + BB^T)^{-1} - G(G^TB\,B^TG)^{-1}\,G^T \tag{2.9}$$

eşitliği geçerlidir. $G^Tn = G^TA^TP\,1 = 0$ nedeniyle (2.4)'ten

$$x_b = Q_b\,n = (N + B\,B^T)^{-1}\,n \tag{2.10}$$
$$k = 0$$

çıkar. (2.8) eşitliği sağdan B ile çarpılırsa $Q_b\,B = 0$ koşulunun sağlandığı görülür.

Korelatlar sıfır çıktığından (2.4) normal denklem sistemi korelatlardan bağımsız

$$N x_b = n \tag{2.11}$$

sistemine dönüşür. B matrisinin seçimine bağlı olarak (2.9) ve (2.10) dan x için farklı çözümler elde edilir. Bunlardan her biri (2.11) normal denklem sistemini sağladığından çözüm açık değildir.

Datumu ağın tüm noktaları yardımıyla belirlemek için datum seçici (2.6)'da birim matris olarak öngörülmelidir. Buna göre B = G ve Q_b yerine Q_g ile

$$\begin{bmatrix} N & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Q_g & G(G^TG)^{-1} \\ (G^TG)^{-1}\, G^T & 0 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

çıkar. O_g matrisi için

$$N\, Q_g = I - G(G^TG)^{-1}\, G^T \tag{2.13}$$

ya da

$$Q_g = (N + G\, G^T)^{-1} - G(G^TG\, G^TG)^{-1}\, G^T \tag{2.14}$$

eşitlikleri geçerli olduğundan (2.4)'ten

$$\begin{aligned} x_g &= Q_g\, n = (N + G\, G^T)^{-1}\, n \\ k &= o \end{aligned} \tag{2.15}$$

çözümü elde edilir. (2.13) eşitliği sağdan G ile çarpılırsa $Q_gG = 0$ özelliğinin geçerli olduğu görülür. Q_g ağırlık katsayıları matrisi N matrisinin Moore-Penrose inversidir:

$$Q_g = N^+ \tag{2.16}$$

N'in tüm inversleri karşısında O_g matrisinin izi ve tüm çözümler karşısında (2.15)'e göre belirlenen x_g koordinat bilinmeyenleri vektörünün normu en küçüktür (tüm iz minimum):

$$\text{iz}\ Q_g = \min\ , \quad x_g^T x_g = \min \tag{2.17}$$

Q_b ağırlık katsayıları matrisi, N normal denklem katsayılar matrisinin simetrik refleksiv genel inversidir:

$$Q_b = N^- \tag{2.18}$$

Bu matriste yalnızca datum noktalarına karşılık alt matrisin izinin ve bu noktaların koordinat bilinmeyenlerinin normunun minimum (kısmi iz minimum) olduğu gösterilebilir

(Koch, 1983a; Illner, 1985). Bunun için datuma giren bilinmeyen parametreler x_1; ötekiler x_2 alt vektörleri içinde toplanmalı; $x^T = [x_1^T \; x_2^T]$ ve bu ayrıma uygun olarak (2.4)'te

$$G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0_2 \end{bmatrix}, \; N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}, \; n = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$$

yazılmalıdır. x_2 yok edilerek (2.4) sistemi datum noktalarına indirgenirse

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & G_1 \\ G_1^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} n_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & G_1(G_1^T G_1)^{-1} \\ (G_1^T G_1)^{-1} G_1^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ o \end{bmatrix}$$

çıkar. Burada indirgenmiş büyüklükler, $N_{11} = N_{11} - N_{12} N_{22}^{-1} N_{21}$ ve $n_1 = n_1 - N_{12} N_{22}^{-1} n_2$ dir.

Datum noktalarına indirgenmiş normal denklem sistemi (2.12) ile karşılaştırıldığında Q_{11} ağırlık katsayıları matrisinin N in Moore-Penrose inversi olduğu ($Q_{11} = N_{11}^+$) ve $Q_{11}\, G_1 = 0$ özelliğinin sağlandığı görülür. Ayrıca (2.5)'ten $N\, G = 0$ koşuluna karşılık $N_{11}\, G_1 = 0$ çıkar. Bu nedenle x_1 ve Q_{11} için (2.17) özellikleri geçerli olmalıdır:

$$\text{iz}\, Q_{11} = \min \quad , \quad x_1^T x_1 = \min \tag{2.19}$$

$G^T x_g = o$ koşuluna göre datum belirleme ya da (2.3) fonksiyonel modelinde bu koşulun öngörülmesi, ağın bilinmeyen parametreleri, örneğin dengelenmiş koordinatlar ile yaklaşım nokta koordinatları arasında benzerlik (Helmert) dönüşümünün uygulanması anlamına gelir. Burada küçültülmüş bilinmeyenler yaklaşık koordinatlara getirilen düzeltmelerdir. Bu nedenle Helmert dönüşümünde düzeltmelerin kareleri toplamının minimum olması koşulu (2.17)'ye göre $x_g^T x_g = \min$ özelliğiyle özdeştir.

Datum için $B^T x_b = o$ koşulu öngörülmüşse, Helmert dönüşümü nokta kümesinin datumu tanımlayan bölümünü kapsar ve minimum norm özelliği bilinmeyenler vektörünün datum noktalarına ilişkin bölümü için geçerli olur. Buna göre, tüm iz minimum ve kısmi iz minimum çözümleri arasında

$$\text{iz}\, Q_g < \text{iz}\, G_b \quad , \quad x_g^T x_g < x_b^T x_b \tag{2.20}$$

eşitsizlikleri yazılabilir.

Datum için B matrisinde defekt sayısı d kadar parametre öngörülürse O_b matrisinde bu parametrelere karşılık satır ve sütunlar sıfır çıkar. Bu sonuç, d sayıda parametrenin sabit alındığı ya da düzeltme denklemlerinde ilgili sütunların çizildiği klasik dengeleme ile özdeştir.

Bilinmeyenler vektörü koordinat bilinmeyenleri yanında yönlendirme ve ölçek faktörleri gibi başka bilinmeyenleri de içerebilir. Bir serbest ağın datumu genellikle yaklaşık koordinatlar yardımıyla tanımlanır. Bu nedenle, ya koordinat bilinmeyenleri dışında kalan parametreler normal denklemler indirgenerek önceden yok edilir, ya da datumu belirleyen B ve G matrisleri normal denklemlerin yalnızca koordinat bilinmeyenlerine karşılık bölümü için oluşturulur.

2.3- S-Transformasyonu

Önceki bölümde açıklandığı gibi, tekil bir normal denklem sisteminin çözümü $B^T x_b = o$ koşul denklemlerinin seçimine bağlı olarak değişmektedir. Koşul denklemleri, ağın belli sayıda bilinmeyen parametreleri (datum noktalarının koordinatları) yardımıyla tanımlanmakta ve her bir datum değişikliği yeni bir dengelemeyi zorunlu kılmaktadır. S-transformasyonu ile yeni bir dengelemeye gerek olmadan herhangi bir datumdan istenilen başka bir datuma geçilebilmektedir. $B^T x_b = o$ koşuluna karşılık S_b transformasyon matrisi (2.18) ile (2.8)'den

$$S_b = N^{-} N = I - G(G^T G)^{-1} B^T \tag{2.21a}$$

ve $B = G$ için S_g transformasyon matrisi (2.16) ile (2.13)'ten

$$S_g = N^{+} N = I - G(G^T G)^{-1} G^T \tag{2.21b}$$

eşitlikleriyle tanımlanır.

(2.10) eşitliğine göre k datumuna $(B \longrightarrow B_k)$ karşılık $x_k = Q_k^{\cdot} n$ eşitliğinde (2.11) nedeniyle n yerine $n = N x_i$ yazılırsa, (2.21a) da B yerine B_k datum matrisi yazılarak elde edilecek S_k transformasyon matrisiyle

$$x_k = Q_k N x_i = S_k x_i \tag{2.22a}$$

ve benzer biçimde (2.15)'ten

$$x_g = Q_g N x_i = S_g x_i \tag{2.22b}$$

çıkar. Buna göre, i datumuna karşılık x_i çözüm vektöründen herhangi bir k datumuna ilişkin x_k çözüm vektörüne, bunun gibi tüm ağ noktalarının kullanıldığı g datumundaki x_g çözümüne S_k ve S_g transformasyon matrisleriyle geçilebileceği görülmektedir.

$N G = O$, $Q_b B = O$, $Q_g G = 0$ nedeniyle (2.8) ve (2.13)'e göre

$$N Q_b N = N \ , \ N Q_g N = N \tag{2.23a}$$

ve

$$Q_b N Q_b = Q_b \ , \ Q_g N Q_g = Q_g \tag{2.23b}$$

olduğundan x_i çözümüne ilişkin Q_i ağırlık katsayıları matrisinin S_k ve S_g transformasyon matrisleriyle

$$S_k \, Q_i \, S_k^T = Q_k \, N \, Q_i \, N \, Q_k = Q_k \tag{2.24a}$$

$$S_g \, Q_i \, S_g = Q_g \, N \, Q_i \, N \, Q_g = Q_g \qquad (S_g^T = S_g) \tag{2.24b}$$

biçiminde herhangi bir k datumuna karşılık x_k çözümünün Q_k ve g datumuna karşılık x_g çözümünün Q_g ağırlık katsayıları matrislerine dönüştürülebileceği görülmektedir.

S-transformasyonu ile herhangi bir datuma geçmek için yalnızca yeni datumu bilmek yeterli olmaktadır. Çok sayıda transformasyonun art arda uygulanması durumunda sonucun en son transformasyon olduğu (2.21a ve b) eşitlikleriyle gösterilebilir:

$$S_i \, S_j \, S_k = S_i \quad , \quad S_g \, S_j \, S_k = S_g \tag{2.25}$$

(2.21a ve b) eşitliklerine göre S_g simetrik, S_b ise simetrik değildir. S-transformasyonuna ilişkin daha çok bilgi (Illner, 1985)'te verilmektedir.

Defekt sayısı kadar parametrenin sabit alındığı serbest ağ dengelemesinde normal denklem katsayılar matrisi ve bilinmeyenlerin ağırlık katsayıları matrisi regulerdir. Bu matris, defekt sayısı kadar sıfır elemanlı satır ve sütunla genişletilerek S_g ve S_b transformasyon matrisleriyle tüm iz minimum ya da kısmi iz minimum çözümlerine dönüştürülebilir. Klasik dengelemenin bilinmeyenler vektörü de transformasyondan önce d sayıda sabit parametreye karşılık sıfırla genişletilmelidir. Önce klasik dengeleme yapılması ve sonuçların ikinci adımda S-transformasyonu yardımıyla istenen datuma dönüştürülmesi uygulamada kolaylık sağlar.

Herhangi bir reguler matris, belli bir defekt ve datuma göre oluşturulan transformasyon matrisiyle (S_g ya da S_b) doğrudan tekil bir matrise dönüştürülebilir. Tekil matrisin defekt sayısı ve datumu transformasyon matrisiyle belirlenir. Bu işlem jeodezik ağların optimizasyonunda kullanılan ve tanımlanmış bir datumu olmayan ölçüt matrislerine uygulanır.

3- DEFORMASYON ANALİZİ

3.1- Genel Bakış

Mühendislik ölçmelerinde önemli yapıların, zemin kaymalarının ve tektonik kabuk hareketlerinin kontrolu amacıyla jeodezik ağlar oluşturulur. Belli aralıklarla ağda gözlemler yapılarak hareketli ve stabil noktalar ve buna göre obje değişimleri belirlenir. Ağ sıklaştırmalarında da bağlantı noktalarının konumları istatistik test yöntemleriyle kontrol edilir.

Hareketlerin saptanmasına yönelik olarak geliştirilen çeşitli statik yöntemler, genellikle farklı zamanlarda gözlenen bir jeodezik ağda eşlenir nokta koordinatlarının karşılaştırılması ve doğrusal hipotez testleriyle sapmaların anlamlı (signifikant) olup olmadığının araştırılmasına dayanır. Bir peryotta gözlenen ağ geometrisinin, kimi noktaların zarar görmesi, ağı genişletme amacıyla yeni noktalar eklenmesi ya da ölçme programının sınırlı tutulması gibi nedenlerle öncekinden farklı olması durumunda deformasyon analizi yalnızca her iki peryotta eşlenik noktalar içeren ağ bölümleri için yapılır. Karşılaştırılacak eşlenik nokta koordinatları aynı bir datumda belirlenmiş olmalıdır.

Anlamlı nokta hareketlerinin araştırılmasına (deformasyonların yerelleştirilmesine) geçmeden önce eşlenik ağ bölümleri tüm olarak karşılaştırılır ve aralarında anlamlı aykırılıklar olup olmadığı ortaya konur (global test).

3.2- Doğrusal Hipotez Testi

Dengeleme modeli,

$$1 + v = A\,x \quad , C_{11} = \sigma_0^2\, Q_{11} = \sigma_0^2\, P^{-1} \qquad (3.1)$$

olduğuna göre x bilinmeyenleri ya da bir bölümü arasında belli koşulların geçerli olup olmadığını test etmek amacıyla

$$H_0 \; : B\,x = w \qquad (3.2)$$

hipotezi öngörülür (Koch, 1980; Niemeier, 1985). Bilinmeyenlerin seçiminde, örneğin uzaklık ölçülerinde ölçek faktörlerinin, bunun gibi bir uzaklık ölçere ilişkin toplam sabitenin bilinmeyen olarak alınmasına açıkça karar verilemediği durumlarda (3.2) doğrusal hipotezi oluşturulur. Deformasyon analizinde (3.2) sıfır hipotezi değişik peryotlarda gözlenen eşlenir ağ noktalarının koordinatları arasındaki farkların sıfıra eşit olduğunu, başka bir deyişle ağın herhangi bir noktasında hareket olmadığını varsayan koşul denklemleri biçimindedir (bak. Bölüm 3.3).

(3.2) doğrusal hipotezinin oluşturulan dengeleme modeliyle uyuşumlu olup olmadığı sorusu F-testine göre yanıtlanır. Sıfır hipotezi geçerli ise (3.1) yerine dengeleme modeli bilinmeyenleri arasında koşul denklemleri bulunan

$$\begin{aligned} &1 + v_H = A\,x_H \;, \; C_{11} = \sigma_0^2\, Q_{11} \\ &B\,x_H = w \end{aligned} \qquad (3.3)$$

denklem sistemi biçiminde tanımlanır. (3.1) dengeleme modelinden bilinmeyen parametreler x ve düzeltmelerin kareleri toplamı Ω için

$$x = N^{-} A^T Pl, \; N = A^T PA \qquad (3.4)$$

$$\Omega = (l - Ax)^T\, p(l - Ax) = v^T Pv \qquad (3.5)$$

çözümleri elde edilir.

Bilinmeyenleri arasında koşul denklemleri bulunan dolaylı ölçüler dengelemesine ilişkin çözüm yollarından gidilerek (3.3) modelinden bilinmeyenler vektörü x_H ve düzeltmelerin kareleri toplamı Ω_H için bulunacak çözüm eşitliklerinde (3.4) ve (3.5) bağıntıları göz önünde tutulursa H_o hipotezinin etkisini gösteren

$$x_H = x - N^- B^T (BN^- B^T)^- (Bx - w) \tag{3.6}$$

ve

$$R = (Bx - w)^T (BN^- B^T)^- (Bx - w) \tag{3.7}$$

ile

$$\Omega_H = \Omega + R \tag{3.8}$$

eşitlikleri elde edilir.

R büyüklüğü, sıfır hipotezi nedeniyle (3.1) dengeleme modeline göre bulunan Ω daki değişim ya da artım miktarıdır. Datum defekti d, ölçü sayısı n, bilinmeyen sayısı u, serbestlik derecesi $f = n - u$ ve dış merkezlik parametresi λ olmak üzere (3.1)'den bulunacak Ω için χ^2 – dağılımı,

$$\frac{\Omega}{\sigma_o^2} \sim \chi^2 (f, \lambda) \tag{3.9}$$

geçerlidir. Ölçüler normal dağılımlı ve (3.1) modeli doğru ise dış merkezlik parametresi sıfıra eşittir ($\lambda = 0$).

R büyüklüğü için serbestlik derecesi h, (3.7) eşitliğine göre

$$h = rg (BN^- B^T) \tag{3.10}$$

dir. (3.2) sıfır hipotezi geçerli; $E(Bx - w) = o$ ise R büyüklüğüne ilişkin dış merkezlik parametresi λ_H sıfıra eşittir ($\lambda_H = 0$). R için de genel olarak χ^2 – dağılımı,

$$\frac{R}{\sigma_o^2} \sim \chi^2 (h, \lambda_H) \tag{3.11}$$

geçerlidir.

H_o hipotezini test etmek için test büyüklüğü olarak, birbirinden bağımsız χ^2 - dağılımlı (3.9) ve (3.11) büyüklüklerinin F-dağılımlı oranı,

$$F = \frac{R / h}{\Omega / f} \sim F (h, f, \lambda_H) \tag{3.12}$$

oluşturulur. α yanılma olasılığı olmak üzere H_o hipotezi için

$$P (F > F_{h, f, 1-\alpha}) = \alpha \tag{3.13}$$

olasılık eşitliği geçerlidir. Uygulamada (3.12) oranı, $1-\alpha$ istatistik güveni için F-dağılımının h ve f serbestlik derecelerine karşılık sınır değerinden daha büyük çıkarsa (3.2) doğrusal hipotezi reddedilir. Aşağıda ele alınan deformasyon analizi burada açıklanan doğrusal hipotez testine dayanmaktadır.

3.3- Deformasyon Analizinde Doğrusal Hipotez Testi (Global Test)

Değişik peryotlarda geometrisi aynı kalan bir konum ağında t_1 ve t_2 zamanlarında yapılan ölçüler l_1 ve l_2, düzeltmeler v_1 ve v_2, fonksiyonel modelde katsayılar matrisleri A_1 ve A_2, koordinat bilinmeyenlerinin tahmin değerleri x_1 ve x_2 ile gösterilir ve peryotlara ilişkin bilinmeyenler arasında bir fonksiyonel ilişki olmadığı varsayılırsa dengeleme modeli,

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{3.14a}$$

düzeltme denklemleri ve değişik peryotların ölçüleri arasında korelasyon yoksa

$$C_{11} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & O_{22} \end{bmatrix} \tag{3.14b}$$

varyans-kovaryans matrisiyle tanımlanır.

Her iki peryot arasında anlamlı nokta hareketi olup olmadığı sorusunu yanıtlamak için, (3.2) doğrusal hipotezi her iki peryot arasında eşlenik nokta koordinatlarının değişmediğini öngören

$$H_0 : [-I \quad I] \begin{bmatrix} E(x_1) \\ E(x_2) \end{bmatrix} = o \tag{3.15}$$

denklem sistemi biçimindedir $B = [-I \quad I]$, $w = o$).

(3.14) modeline göre dengeleme, peryotlar için birbirinden bağımsız iki dengelemeye ayrılır. Dengeleme sonucu olarak,

$$x_1 = Q_{x_1 x_1} A_1^T P_1 l_1 \ , \ Q_{x_1 x_1} = N_{11}^+ = (A_1^T P_1 A_1)^+ \tag{3.16}$$

$$x_2 = Q_{x_2 x_2} A_2^T P_2 l_2 \ , \ Q_{x_2 x_2} = N_{22}^+ = (A_2^T P_2 A_2)^+ \tag{3.17}$$

$$\Omega = v_1^T P_1 v_1 + v_2^T P_2 v_2 \ , \ (\text{koşul: } \sigma_{01}^2 = \sigma_{02}^2 = \sigma_0^2) \tag{3.18}$$

$$m_0^2 = \Omega / f \ , \quad f = n_1 + n_2 - 2u + 2d \tag{3.19}$$

elde edilir. (3.14) modeli (3.15) doğrusal hipoteziyle birlikte değerlendirildiğinde iki peryot arasındaki koordinat farkları,

$$d = x_2 - x_1 \tag{3.20}$$

ve bunlara ilişkin ağırlık katsayıları matrisi.

$$Q_{dd} = Q_{x_1 x_1} + Q_{x_2 x_2} \tag{3.21}$$

olmak üzere (3.7) eşitliğinden

$$R = d^T Q_{dd}^{+} d \tag{3.22}$$

çıkar. Her iki peryotta ağ geometrisi ve serbest datum parametreleri aynı (sayısı d) ise R' nin serbestlik derecesi,

$$h = rg\,(Q_{x_1 x_1}) = rg\,(Q_{x_2 x_2}) = u - d \tag{3.23}$$

olur. (3.15) doğrusal hipotezini test etmek için (3.12) test büyüklüğü,

$$F = \frac{R / h}{\Omega / f} = \frac{d^T Q_{dd}^{+} d}{m_o^2 h} \tag{3.24}$$

ve (3.13) olasılık eşitliği geçerlidir. Buna göre, $F > F_{h,\, f,\, 1-\alpha}$ çıkarsa ağın herhangi bir yerinde deformasyon olduğu sonucuna varılır.

3.4- S-Transformasyonu Yardımıyla Global Test

t_1 ve t_2 zamanlarında gözlenen ağ geometrileri farklı ise global test, yalnızca eşlenik noktalardan oluşan ağ bölümlerini kapsar. Her iki ağda eşlenik noktalar datum noktaları olarak öngörülerek Bölüm 2.2'de açıklandığı gibi, yalnızca koordinat bilinmeyenlerinin bu noktalara ilişkin bölümünün normu ve bunlara ağırlık katsayıları matrisinin izi minimum yapılır. Başka bir deyişle, t_1 ve t_2 zamanlarında ölçülen ağlar eşlenik noktalara göre konumlandırılır.

Anlamlı nokta hareketlerinin araştırılmasında da sürekli datum değişikliği zorunlu olduğundan karşılaştırılacak ağları önce herhangi bir datumda, örneğin defekt sayısı kadar parametreyi sabit alarak ayrı ayrı (klasik) dengelemek ve sonuçları istenen datumlara dönüştürmek kolaylık sağlar.

t_ν zamanında ölçülen bir ağda "e" ile tanımlanan eşlenik (datum) noktaların koordinatları ilk sırada, "b" ile tanımlanan diğer noktaların koordinatları ve başka bilinmeyenler ikinci sırada olmak üzere herhangi bir i datumunda serbest dengeleme ile belirlenmiş olsun. Buna göre, i datumuna ilişkin x_i parametreler vektörü

$$x_i = \begin{bmatrix} x_e^i \\ x_b \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

biçiminde iki alt vektöre ayrılır. Bu ayrıma karşılık ağırlık katsayıları matrisi,

$$Q_{xx}^i = \begin{bmatrix} Q_{ee}^i & Q_{eb}^i \\ Q_{be}^i & Q_{bb}^i \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

olur. (2.6)'ya göre datum seçici E matrisi köşegeni üzerinde ilk sırada datum noktalarına karşılık "1", öteki bilinmeyen parametreler için "0" değerlerini içermesi gerektiğinden,

$$G = \begin{bmatrix} G_e \\ G_b \end{bmatrix} \quad , \quad B_j = E_j\, G = \begin{bmatrix} G_e \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

olmak üzere (2.21a) eşitliğine göre

$$S_j = I - G(B_j^T G)^{-1}\, B_j^T \tag{3.28}$$

transformasyon matrisiyle i datumundan ağın eşlenik noktalara göre konumlandırılmasını sağlayan j datumuna (2.22a) ve (2.24a) eşitlikleriyle geçilir:

$$\begin{bmatrix} x_e^j \\ x_b^j \end{bmatrix} = S_j \begin{bmatrix} x_e^i \\ x_b^i \end{bmatrix} , \quad Q_{xx}^j = \begin{bmatrix} Q_{ee}^j & Q_{eb}^j \\ Q_{be}^j & Q_{bb}^j \end{bmatrix} = S_j\, Q_{xx}^i\, S_j^T \tag{3.29}$$

(2.19)'a göre kısmi iz minimum; $(x_e^j)^T\,(x_e^j) = \min$ ve iz $(Q_{ee}^j) = \min$ özellikleri geçerlidir.

(3.25) – (3.29) işlemleri 1 ve 2. peryotlar için ayrı ayrı yapılarak aynı bir j datumunda eşlenik noktaların $(x_e^j)_1$ ve $(x_e^j)_2$ koordinat bilinmeyenleriyle bunların $(Q_{ee}^j)_1$ ve $(Q_{ee}^j)_2$ ağırlık katsayıları matrisleri bulunur.

Eşlenik noktaların global testi için (3.20) – (3.24) eşitliklerine uygun olarak,

$$H_0 : E(x_{e1}^j) = E(x_{e2}^j) \tag{3.30}$$

$$d_e = x_{e2}^j - x_{e1}^j \tag{3.31}$$

$$(Q_{dd})_e = (Q_{ee}^j)_1 + (Q_{ee}^j)_2 \tag{3.32}$$

$$R_e = d_e^T (Q_{dd})_e^+ d_e \tag{3.33}$$

ve R_e nin serbestlik derecesi $h_e = u_e - d$ ile

$$F = \frac{R_e}{m_o^2 h_e} \tag{3.34}$$

test büyüklüğü elde edilir. $F > F_{h_e, f, 1-\alpha}$ çıkarsa ağın eşlenik noktalardan oluşan bölümünde bir deformasyon olduğuna karar verilir.

Obje noktaları sabit kabul edilen dış noktalara bağlanan kontrol ağlarında, obje noktaları x_b alt vektörü içinde düşünülerek bağlantı noktalarının yer değiştirip değiştirmediği yukarıda açıklanan yöntemle açıklığa kavuşturulabilir.

3.5- S-Transformasyonu Yardımıyla Anlamlı Nokta Hareketlerinin Araştırılması

Global test sonucunda ağın tümünün ya da eşlenik noktalar bölümünün herhangi bir yerinde deformasyon olduğuna karar verilmiş ise hareketli noktaların araştırılmasına geçilir. Eşlenik noktalardan her birinin yer değiştirmiş olabileceği düşünülerek i datumunda serbest dengeleme ile belirlenmiş bir peryoda ilişkin (3.25) parametreler vektörünün eşlenik nokta koordinatlarını içeren x_e^i alt vektörü, hareket ettiği varsayılan bir noktanın koordinatlarını içeren x_h^i ve öteki (sabit kabul edilen) eşlenik nokta koordinatlarını içeren x_s^i alt vektörlerine ayrılır. Eşlenik olmayan noktalara ilişkin parametreler ve diğer bilinmeyenler x_b^i vektörü içinde toplandığına göre (3.25) vektörü ve (3.26) ağırlık katsayıları matrisi,

$$x^i = \begin{bmatrix} x_s^i \\ x_h^i \\ x_b^i \end{bmatrix}, \quad Q_{xx}^i = \begin{bmatrix} Q_{ss}^i & Q_{sh}^i & Q_{sb}^i \\ Q_{hs}^i & Q_{hh}^i & Q_{hb}^i \\ Q_{bs}^i & Q_{bh}^i & Q_{bb}^i \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

olur (Niemeier, 1985b).

t_ν zamanında ölçülen ağ şimdi koordinatları x_s içinde toplanan ve sabit kabul edilen noktalara göre konumlandırılmalıdır. Bu datum k ile gösterilirse (3.35) ayrımına uygun olarak (3.27) yerine

$$G = \begin{bmatrix} G_s \\ G_h \\ G_b \end{bmatrix}, \quad B_k = E_k\, G = \begin{bmatrix} G_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

ile (3.28)'den S_k transformasyon matrisi bulunmalı ve her bir peryot için

$$\begin{bmatrix} x_s^k \\ x_h^k \\ x_b^k \end{bmatrix} = S_k \begin{bmatrix} x_s^i \\ x_h^i \\ x_b^i \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} Q_{ss}^k & Q_{sh}^k & Q_{sb}^k \\ Q_{hs}^k & Q_{hh}^k & Q_{hb}^k \\ Q_{bs}^k & Q_{bh}^k & Q_{bb}^k \end{bmatrix} = S_k \begin{vmatrix} Q_{ss}^i & Q_{sh}^i & Q_{sb}^i \\ Q_{hs}^i & Q_{hh}^i & Q_{hb}^i \\ Q_{bs}^i & Q_{bh}^i & Q_{bb}^i \end{vmatrix} S_k^T \tag{3.37}$$

transformasyonları yapılmalıdır. Sabit kabul edilen noktaların ya da

$$H_o : E(x_{s1}^k) = E(x_{s2}^k) \tag{3.38}$$

sıfır hipotezinin testi için (3.31) — (3.33) eşitliklerine uygun olarak iki peryoda ilişkin x_s alt vektörlerinin d_s koordinat farkları

$$d_s = x_{s2}^k - x_{s1}^k , \tag{3.39}$$

bunların ağırlık katsayıları matrisi,

$$(Q_{dd})_s = (Q_{ss}^k)_1 + (Q_{ss}^k)_2 \tag{3.40}$$

ve düzeltmelerin kareleri toplamı için artım miktarı,

$$R_s = d_s^T (Q_{dd})_s^+ d_s \tag{3.41}$$

elde edilir. (3.35) — (3.42) işlemleri x_e alt vektöründeki noktalardan her biri için yinelenerek her defasında x_s ve x_h ayrımına karşılık bir R_s değeri bulunur. Global test soncu ağın herhangi bir yerinde deformasyon olduğuna karar verilmiş ise,

$$(R_s)_{min} = \min (R_{s,\,i} \, , i = 1, p) \tag{3.42}$$

(p eşlenik nokta sayısı) değerli noktadaki hareket anlamlı görülür. (3.34)'e göre

$$F = \frac{(R_s)_{min}}{m_o^2 \, h_s} \tag{3.43}$$

test büyüklüğü $F_{h_s, f, 1-\alpha}$ sınır değerinden büyük çıkıyorsa $(R_s)_{min}$ değerli nokta x_b vektörü içine alınır ve geri kalan eşlenik nokta kümesi için (3.35) — (3.43) işlemleri yinelenerek öteki hareketli noktaların araştırılması sürdürülür.

4- SONUÇ

Bu çalışma ile jeodezik ağlarda datum problemine açıklık getirmek ve datum tanımlarıyla S-transformasyonunu genel çizgileriyle tanıtmak amacı güdülmüştür.

Jeodezide geniş uygulama alanı olan ve geometrik deformasyon analizinin de temelini oluşturan genel doğrusal hipotez testi verilmiş ve çeşitli yöntemlerden biri olan S-transformasyonu, yalnızca iki peryot için deformasyon analizine uygulanmıştır.

KAYNAKÇA

Illner, İ., (1985), Datumsfestlegung in freien Netzen, Deutsche Geodaetische Kommission, Reihe C, Nr. 309.

Koch, K.R. (1980), Parameterschaetzung und Hypotezentests in linearen Modellen, Dümmler Verlag, Bonn.

Koch, K.R. (1983), Die Wahl des Datums eines trigonometrischen Netzes bei Punkteinschaltungen, Zeitschrift für Vermessungswesen, Heft 3, 104-110.

Niemeier, W. (1985a), Netzqualitaet und Optimierung, in: Pelzer, H. (Hrsg.), Geodaetische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II, Wittwer Verlag, Stuttgart.

Niemeier, W. (1985b), Deformationsanalyse, in: Pelzer, H. (Hrsg.), Geodaetische Netze in Landes - und Ingenieurvermessung II, Wittwer Verlag, Stuttgart.