

# KARŞILIKLI BAŞUCU AÇISI ÖLÇÜMLERİ İLE ÇEKÜL SAPMALARININ SIKLAŞTIRILMASI (Aynı adlı doktora tezinin özetidir)

Dr. Burhan Celil IŞIK  
Yıldız Üniversitesi

## 1- GİRİŞ

Jeodeziye, geometrik kavramlardan sonra fiziksel kavramların da girmesi ile ku-ramsal ve kılgsal atılımlar birbirini izlemiş ve yeryuvarı biçiminin belirlenmesinin bir bo-yutu olarak yatay ve düşey kontrol ağlarının oluşturulması, yönetilmesi ve hesaplamala-rı üzerine çeşitli yöntemler araştırılmış, geliştirilmiştir.

Üç boyutlu jeodezi kavramının Bruns tarafından ortaya atıldığı 1878 yılından gü-nümüze kadar geçen zaman aralığı nirengi, nivelman, gravite ve uydu ağları gibi özel amaçlar için tasarlanan ağların geliştirilmesi biçiminde olmuştur. Sözü edilen bu yatay ve düşey kontrol ağlarının duyarlı olarak belirlenmesi istemi, ağa ilişkin bilgilerin, yani yatay açı, düşey açı ve uzaklıkların bir referans elipsoidine indirgenmesini zorunlu kılar. Bunun için jeoid yükseklikleri, gravite değerleri ve çekül sapmaları gibi ek bilgilere ge-reksinme duyulur.

Topoğrafik yapıya göre çok çabuk değişim gösteren çekül sapmalarını belirlemek için her noktada astronomik gözlem yapılması zaman, işgücü ve maliyet yönünden uy-gun değildir. Bu nedenle ek bilgiler ve ölçü büyüklükleri yardımıyla sıklaştırma işlemi yeğlenir. Sıklaştırma,

- Başucu açılanna,
- Torsiyon terazisi, yani ağırlığın yatay gradyentlerine,
- Ağırlık ölçüleri ve bunlardan hesaplanan çekül sapmalarına,
- Topoğrafik-izostatik çekül sapmalarına

göre yapılabilir. Ağırlık ölçülerinin yetersizliği yüzünden ikinci ve üçüncü yöntemler şu an için özellikle ülkemizde işlem dışı kalmaktadır. Son yöntem duyarlı olmasına karşın, arazi yüksekliklerinin saptanmasının güçlüğü söz konusu olmaktadır. Geriye kalan baş-ucu açılarıyla sıklaştırma yöntemi, İsviçre ve Çekoslovakya gibi ülkelerde iyi sonuçlar vermiştir.

Topoğrafik yapısı bozuk dağlık ülkelerde büyük ölçekli harita yapımının hızlandı-rılmasında, sanat yapılarındaki deformasyonların belirlenmesinde ve yer kabuğu hareket-lerinin saptanmasında önemi yadsınamayan çekül sapmalarının sıklaştırılması, ülkemiz-deki jeodezik çalışmalar için de bir gereksinmedir.

Başucu açıları ile sıklaştırma konusunda herhangi bir çalışmaya rastlanılmaması nedeni ile bu yöntemin ülkemiz koşullarında da kullanılabilirliğinin ortaya konması, ça-lışmanın amacını oluşturmıştır.

## 2- TARİHÇE VE YAPILAN DENEYSSEL ARAŞTIRMALAR

Çekül sapması bileşenlerinin başucu açılarından belirlenmesi yönteminden biraz değişik bir biçimde ilk kez Willarceau ve Bruns söz etmişlerdir. Ancak, kırılmanın yeterli duyarlıkta belirlenememesi nedeniyle bir süre ilgilenilmemiştir. Daha sonra 1930'larda K.Brocks, R.Finsterwalder ve W.Hoffmann konu üzerinde çalışmışlar, ancak duyarlık yönünden bir yargıda bulunmamışlardır. Bundan sonraki çalışmalar trigonometrik nivelmanın duyarlığını artırmak olmuştur. Bu çalışmalar yalnızca başucu açısı ölçülerinin iyileştirilmesi ve kırılmanın elenmesinde değil, hesaplama bağıntıları üzerinde de yoğunlaşmıştır.

İlk deneysel araştırma 1951 yılında SGK çalışmaları ile St.Gotthard Meridyeninde yapılmıştır. 1958 yılında Çekoslovakya'da, Isar Nehri üzerindeki bir baraj projesi için kurulan ağda çekül sapmaları yaklaşık bir yöntemle, belirleme denklemleri yöntemiyle belirlenmiştir. 1959-1960'larda yine Çekoslovakya'da West-Tatra dağlarında kırılma araştırmaları için kurulan ağda astronomik-jeodezik çekül sapması bileşenleriyle arasındaki ortalama farkı 2.8" bile olmayan çekül sapması bileşenleri elde edilmiştir. 1963-67 yıllarında İsviçre'de Berner-Oberland ve Oberwallis ağlarında bölge kırılma katsayısı modeli kullanılarak yapılan hesaplarda başarılı sonuçlar elde edilmiş, daha sonra 1970 yılında Çekoslovakya ile yapılan işbirliği sonucunda sıfır kırılma modeli kullanılarak ağ yeniden dengelenmiş, duyarlığın arttığı gözlenmiştir. Son olarak 1973 yılında Çekoslovakya'nın South-Sloaakia uzun kenarlı ağında yapılan hesaplar, yöntemin uzun kenarlı ağlar için de uygulanabilirliğini göstermiştir.

## 3- HESAP MODELİ

Başucu açısı ölçümleri ile çekül sapmalarının sıklaştırılması,

- Yüksekliklerin konum belirlenmesinden bağımsız saptanması, yani trigonometrik nivelman ağlarının dengelenmesi,
- Konum ve yüksekliklerin birlikte saptanması, yani üç boyutlu ağların dengelenmesi,
- Başucu açılarının toplamalarının dengelenmesi ile yapılabilir.

Trigonometrik nivelman ağlarının dengelenmesinde düzeltme denklemlerinin elde edilmesine temel olan alışılagelmiş

$$\Delta h_{ik} = s_{ik} \cot z_{ik} + \frac{1-k}{2R_i} s_{ik}^2 \quad (1)$$

eşitliği dışındaki diğer eşitlikler Şekil 1'den

$$\Delta h_{ik} = s_{ik} \frac{\cos(z_{ik} - 1/2\gamma_{ik})}{\sin(z_{ik} - \gamma_{ik})} \quad (2)$$

$$\Delta h_{ik} = l_{ik} \frac{\cos(z_{ik} - 1/2\gamma_{ik})}{\cos \frac{\gamma_{ik}}{2}} \quad (3)$$

olarak yazılabilir ki, bunlar ağıın her noktasında kırılma katsayısının ve çekül sapması bileşenlerinin belirlenmesi için uygundur.

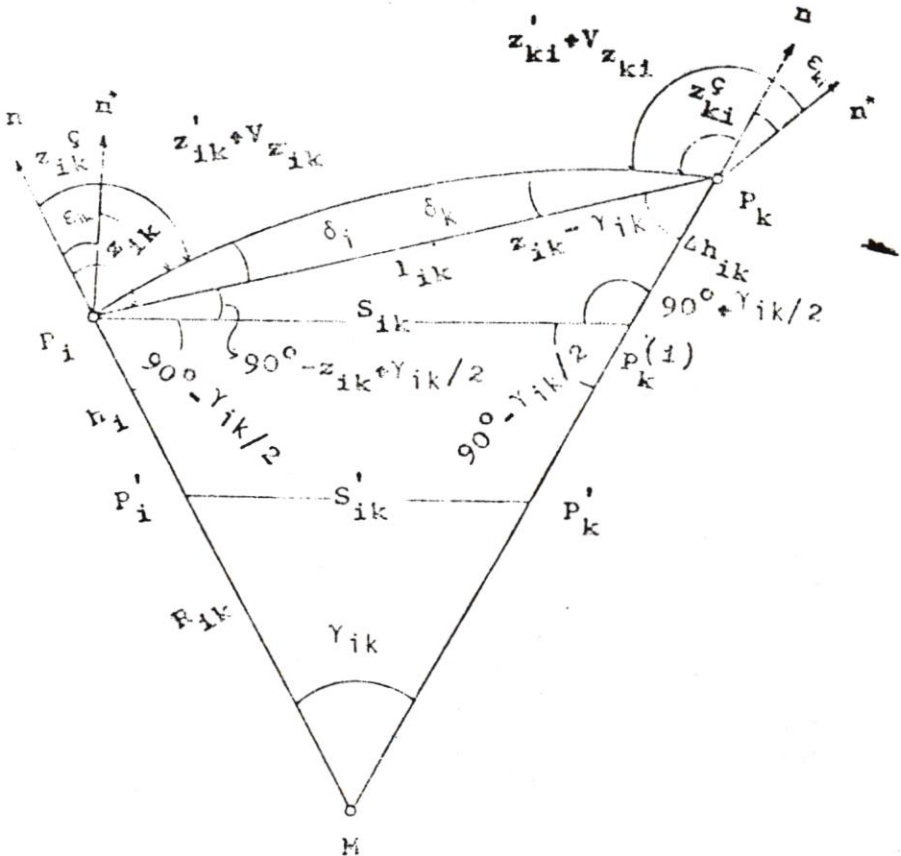
(2) ve (3) No'lu eşitliklerde geçen  $z_{ik}$  başucu açısı, kırılma ve çekül sapmaları nedeniyle düzeltilmiş, dengelenmiş başucu açısıdır. Bu demektir ki,

$$z_{ik} = z'_{ik} + v_{z_{ik}} + dz_{ik} \quad (4)$$

$$dz_{ik} = 1/2 k_i \gamma_{ik} + \xi_i \cos \alpha_{ik} + \eta_i \sin \alpha_{ik} \quad (5)$$

$s_{ik}$  ise,

$$s_{ik} = s'_{ik} \left(1 + \frac{h_i}{R_{ik}}\right) \quad (6)$$



Şekil 1

eşitliği gereğince  $P_1$  noktasının yüksekliğine indirgenmiş uzaklıktır.

Kırılma katsayısının önceden belirlenen sabit bir değer olarak kullanılması zorunda kalırsa, tek yanlı gözlemler büyük hatalar doğurabilir. Bu nedenle, yörünge eğriliğinden dolayı düşey açıların düzeltilmesinde gereksinilen kırılma katsayısının hesabı için karşılıklı gözlemlerin yapılması gerekir. Kırılma etkisinin bulunmadığı, başka bir deyişle doğrultunun başında ve sonunda kırılma değerinin eşitliğinin sağlandığı diğer eşitlikler, yatay ve eğik uzaklığın alınmasına göre,

$$\Delta h_{ik} = s_{ik} \frac{\sin 1/2 (z_{ki} - z_{ik})}{\cos 1/2 [(z_{ki} - z_{ik}) + \gamma_{ik}]} \quad (7)$$

$$\Delta h_{ik} = l_{ik} \frac{\sin \frac{1}{2} (z_{ki} - z_{ik})}{\cos 1/2 \gamma_{ik}} \quad (8)$$

eşitlikleridir. Verilen bu eşitliklerin çalışmada yeğlenmesinin nedenini göstermek için, alışlagelmiş eşitliklerle birlikte duyarlılıklarına bakmak gerekir. Uzaklıkların ve başucu açılarının duyarlı, kırılma katsayısının hatasız olduğu varsayılsa bile (1) ve onun değişik bir gösterimi olan

$$\Delta h_{ik} = s_{ik} \cot z'_{ik} + s_{ik}^2 \frac{1 - k}{2R_1 \sin^2 z'_{ik}} \quad (9)$$

eşitliği, özellikle eğik doğrultularda önemli derecede hatalı sonuçlar verir. Çizelge 1'de doğrultu eğimi ve uzaklığa göre (1) ve (9) eşitliklerinin kullanılması durumunda yükseklik hesabında yapılan hatalar verilmektedir ki, bunlara doğrultu azimutundaki  $R_{ik}$  eğrilik yarıçapları yerine Gauss eğrilik yarıçapının alınması ile oluşan hataları da eklemek gerekir.

Çizelge 1- (1) ve (9) eşitliklerinin hataları

Doğrultu Eğimi	(1) Eşitliğinin Hatası		(9) Eşitliğinin Hatası	
	S = 5 km	S = 10 km	S = 5 km	S = 10 km
0°	0.0 mm	0.0 mm	0.0 mm	0.0 mm
5°	28.2 mm	113.8 mm	15.2 mm	61.6 mm
10°	114.3 mm	459.0 mm	61.3 mm	247.0 mm
20°	486.3 mm	1948.8 mm	260.5 mm	1045.8 mm

Aynı varsayımla (2), (3), (7) ve (8) eşitliklerinin kullanılması durumunda büyük doğrultu eğimlerinde bile hatalı sonuçlar elde edilmez. Örneğin, 27°'lik bir doğrultu eği-



minde 10 km'lik bir uzaklık için 0.05 mm, 25 km'lik bir uzaklık için 0.5 mm'lik bir hata yapılır.

Çizelge 2'de ise 10 km'lik bir uzaklık ve 1" lik başucu açısı duyarlığı ile çeşitli doğrultu eğimlerinde yine aynı eşitliklerin kullanılması durumunda yükseklik farklarının  $m_h$  standart hataları verilmiştir.

Çizelge 2-  $S_{ik} = 10$  km ve  $m_z = 1''$  için  $m_h$  yükseklik farklarının standart hataları (mm biriminde)

Eşitlik No	Doğrultu Eğimleri						
	0°	1°	2°	5°	10°	20°	45°
(2)	48	48	49	49	50	55	97
(3)	48	48	48	48	48	48	48
(7)	34	34	35	35	34	39	69
(8)	34	34	34	34	34	34	34

Haritacılığın geçmişten beri sorunu olan ve buradaki hesap yönteminde de etkisi yadsınamayacak yersel kırılma sorununa da değinmek gerekir.

Kırılmanın, uzun ve karışık araştırmalar yerine, güvenilir ve kolay bir yöntemle belirlenmesi istenen bir olgudur. Bouguer ve Biot varsayımlarının yaklaşık olarak gerçek koşullara uyduğu çoktandır bilinmektedir. Bu varsayımın kullanılmasının nedeni, daha iyi bir hesap yönteminin bilinmemesi, ekonomik olması ve dengeleme ile kırılma güvensizliğinin bir dereceye kadar ortadan kalktığı düşüncesiyledir. Yine de bugüne kadar gösterilen çabalara karşın, kırılma açısının duyarlığı başucu açısının duyarlığına ulaştırılmamıştır.

Ağ dengelemeleri ile kırılmanın saptanmasında, yalnızca kırılma katsayılarının hesap içerisine sokulması yeterli değildir. Her durak noktasında kırılmayı belirlemek ve hesaplanan yüksekliklerin duyarlığını, yatay konum duyarlığına ulaştırabilmek için bazı koşulları göz önüne almak gerekir.

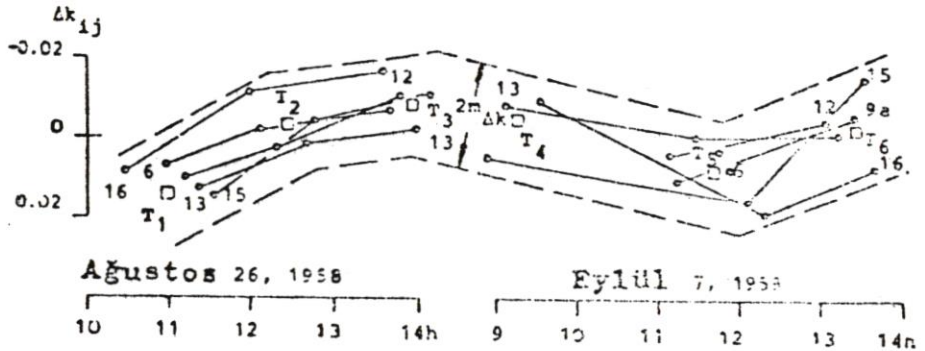
Üç boyutlu ağların ve trigonometrik nivelman ağlarının dengelenmesiyle, ağın kapladığı tüm alan için bir k bölge kırılma katsayısı elde edilebildiği gibi, alanın bölgele-re ayrılması ile her bölge için k kırılma katsayısı ya da her durak noktası için bir  $k_i$  kırılma katsayısı, ya da her doğrultu için bir  $k_{ik}$  doğrultu kırılma katsayısı hesaplanabilir. Kırılma katsayısı,

$$k_{ik} = f(P_i) + g(P_i, P_k) \quad (10)$$

genel modeli ile gösterilir. Sıfır varsayımı yaklaşımında  $f(P_i) = k_i$ ,  $g(P_i, P_k) = 0$ 'dir. Bu durumda (10) genel modeli  $k_{ik} = k_i$  ye dönüşür. Sıfır kırılma modelinin geçerli olup olmadığına başucu açısı ve kırılma değişimleri çizgeleri (grafikleri) incelenerek karar verilir. Herhangi bir durak noktasının tüm doğrultuları için kırılma değişimleri  $2m_{\Delta k}$  kuşağının dışına çıkmıyorsa sıfır kırılma varsayımı doğrulanır. Şekil 2 sıfır kırılma varsayımı olurlanan bir durumu göstermektedir. Ters durumda

$$k_{ik} = k_i + \frac{q_j}{h_{e_{ik}}} \quad (11)$$

karşıt varsayımı geçerlidir.



Şekil 2

Bu eşitlikte  $h_{e_{ik}}$ ,

$$\frac{1}{h_{e_{ik}}} = \frac{2}{s_{ik}^2} \sum_{r=1}^n \frac{1}{h_r} l_r u_r \quad (12)$$

ile verilir.

Başucu açılarının ya da yükseklik farklarının dengelenmesine göre iki tür hata denklemi yazılabilir.

$$V_{\Delta h_{ik}} = dh_i - dh_k + \frac{s'_{ik} - \cos \alpha_{ik}}{\rho \sin^2 z'_{ik}} \xi_i + \frac{s'_{ik} - \sin \alpha_{ik}}{\rho \sin^2 z'_{ik}} \eta_i - l_{ik} \quad (13)$$

hata denklemi, tek yanlı başucu açısı gözlemlerinin,

$$V_{\Delta h_{ik}}^{(1)} = dh_i - dh_k + \frac{s'_{ik} \cos \alpha_{ik}}{2\rho \sin^2 z'} (\xi_i + \xi_k) + \frac{s'_{ik} \sin \alpha_{ik}}{2\rho \sin^2 z'} (\eta_i + \eta_k) - l_{ik}^{(1)} \quad (14)$$

ve

$$V_{\Delta h_{ik}}^{(2)} = \frac{s'_{ik} \cos \alpha_{ik}}{2\rho \sin^2 z'} (\xi_i - \xi_k) + \frac{s'_{ik} \sin \alpha_{ik}}{2\rho \sin^2 z'} (\eta_i - \eta_k) - l_{ik}^{(2)} \quad (15)$$

hata denklemleri ise, karşılıklı başucu açısı gözlemlerinin yapılması durumunda, düzeltmeler yükseklik farklarına getirilecek biçimde oluşturulmuş hata denklemleridir.

$$\begin{aligned} \Delta h_{ik}^{cc} = & \rho^{cc} \frac{\sin^2 z'_{ik}}{s_{ki}} (dh_k - dh_i) - \cos \alpha_{ik} \xi_i^{cc} - \sin \alpha_{ik} \eta_i^{cc} + \\ & + \frac{\rho^{cc}}{2R_{or}} s_{ki} dk + \rho^{cc} \frac{\sin^2 z'_{ik}}{s_{ki}} [(h_k^o - h_i^o) - [s_{ki} \cot z'_{ik} + \\ & + \frac{s'_{ik}}{2R_{ik}} - \frac{k^o}{2R_{or}} (s_{ki}^2 + \Delta h^2)]] \end{aligned} \quad (16)$$

hata denklemi ise, düzeltmeler başucu açısı ölçülerine getirilecek biçimde oluşturulur. İsviçre'de Berner-Oberland ve Oberwallis ağlarının dengelenmesinde bu hata denklemleri kullanılmıştır. Düzeltmeler başucu açılara getirilecek biçimde oluşturulan diğer hata denklemleri, yukarıda daha duyarlı olduğunu söylediğimiz eşitliklerden türetilir. Örneğin yükseklik farkını veren (2) eşitliğinde başucu açısı yerine

$$V_{z_{ik}} = z'_{ik} + V_{z_{ik}} + 1/2 k_i \gamma_{ik} + \xi_i \cos \alpha_{ik} + \eta_i \sin \alpha_{ik} \quad (17)$$

deki eşitini koyup doğrusallaştırırsak

$$\begin{aligned} \Delta h_{ik} = & s_{ik} \frac{\cos(z'_{ik} - 1/2 \gamma_{ik})}{\sin(z'_{ik} - \gamma_{ik})} - s_{ik} \frac{\cos 1/2 \gamma_{ik}}{\rho^{cc} \sin^2(z'_{ik} - \gamma_{ik})} \times \\ & \times (V_{z_{ik}}^{cc} + \frac{1}{2} \gamma_{ik}^{cc} k_i + \xi_i^{cc} \cos \alpha_{ik} + \eta_i^{cc} \sin \alpha_{ik}) \end{aligned} \quad (18)$$

elde edilir.

$$\Delta h'_{ik} = s_{ik} \frac{\cos(z'_{ik} - 1/2 \gamma_{ik})}{\sin(z'_{ik} - \gamma_{ik})} \quad (19)$$

ve

$$a_{ik} = \frac{s_{ik} \cos 1/2 \gamma_{ik}}{\rho^{cc} \sin^2(z'_{ik} - \gamma_{ik})} \quad (20)$$

kısaltmaları ile

$$\Delta h_{ik} = \Delta h'_{ik} - a_{ik} (V_{z_{ik}}^{cc} + 1/2 \gamma_{ik}^{cc} + \xi_i^{cc} \cos \alpha_{ik} + \eta_i^{cc} \sin \alpha_{ik}) \quad (21)$$

durumuna gelen eşitlikte  $\Delta h_{ik}$  yükseklik farkı yerine

$$\Delta h_{ik} = h_k^O - h_i^O + dh_k - dh_i \quad (22)$$

deki eşitini koyup  $V_{z_{ik}}$  düzeltmesi yalnız bırakılırsa

$$V_{z_{ik}}^{cc} = \frac{1}{a_{ik}} dh_i - \frac{1}{a_{ik}} dh_k - \frac{1}{2} \gamma_{ik}^{cc} k_i - \cos \alpha_{ik} \xi_i^{cc} - \sin \alpha_{ik} \eta_i^{cc} + \frac{1}{a_{ik}} (h_i^O - h_k^O + \Delta h'_{ik}) \quad (23)$$

hata denklemleri elde edilir.

Eğik uzaklıkların ölçülmesi durumunda ise (3) eşitliğinden türetilen

$$V_{z_{ik}}^{cc} = \frac{1}{b_{ik}} dh_i - \frac{1}{b_{ik}} dh_k - 1/2 \gamma_{ik}^{cc} k_i - \cos \alpha_{ik} \xi_i^{cc} - \sin \alpha_{ik} \eta_i^{cc} + \frac{1}{b_{ik}} (h_i^O - h_k^O + \Delta h'_{ik}) \quad (24)$$

hata denklemleri geçerlidir. Burada

$$\Delta h'_{ik} = \frac{l_{ik} \sin(z'_{ik} - \frac{1}{2} \gamma_{ik})}{\cos 1/2 \gamma_{ik}} \quad (25)$$

ve

$$b_{ik} = \frac{l_{ik} \sin(z'_{ik} - 1/2 \gamma_{ik})}{\rho^{cc} \cos 1/2 \gamma_{ik}} \quad (26)$$

dır. (23) ve (24) hata denklemlerinden oluşturulan sistemin katsayılar matrisinin rangı, bilinmeyenlerin sayısına eşit olmalıdır. Bu matrisin rangı ise bilinmeyen sayısından bir küçüktür. Bu demektir ki, çözümün yapılabilmesi için dayanılan noktadaki yükseklik ve çekül sapması bileşenlerinden başka bir yükseklik ya da çekül sapması bileşeninin bilinir olması gereklidir.

Koşullu ölçüler dengelemesine göre dengeleme yapılması istendiğinde Şekil 3'ten yararlanarak

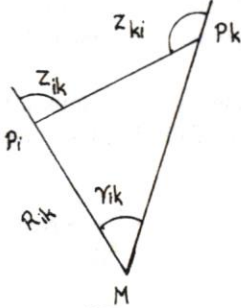


$$200^g - z_{ik} + 200^g - z_{ki} + \gamma_{ik} = 200^g$$

olmak üzere

$$V_{z_{ik}} + V_{z_{ki}} + 1/2 \gamma_{ik} k_i + 1/2 \gamma_{ik} k_k + \cos \alpha_{ik} \xi_i + \sin \alpha_{ik}$$

$$n_i + \cos \alpha_{ki} \xi_k + \sin \alpha_{ki} n_k + z'_{ik} + z'_{ki} - y_{ik} - 200^g = 0 \quad (28)$$



Doğrultu koşul denklemi elde edilir.  
Doğrultu koşul denklemi,

$$\Delta h_{ik} + \Delta h_{ki} = 0 \quad (29)$$

Şekil - 3

yazılarak

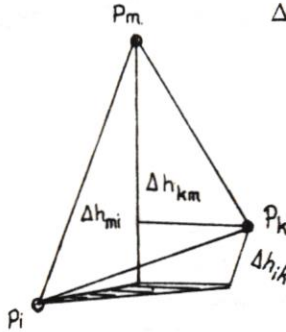
$$a_{ik} V_{z_{ik}}^{cc} + a_{ki} V_{z_{ki}}^{cc} + 1/2 a_{ik} \gamma_{ik}^{cc} k_i + 1/2 a_{ki} \gamma_{ik}^{cc} k_k + a_{ik} \cos \alpha_{ik} \xi_i^{cc} \quad (30)$$

$$+ a_{ik} \sin \alpha_{ik} \eta_i^{cc} + a_{ki} \cos \alpha_{ki} \xi_k^{cc} + a_{ki} \sin \alpha_{ki} \eta_k^{cc} - \Delta h'_{ik} - \Delta h'_{ki} = 0$$

biçiminde türetilbilir. Üçgen koşul denklemleri ise Şekil 4'ten

$$\Delta h_{ik} + \Delta h_{km} + \Delta h_{mi} = 0 \quad (31)$$

Referans elipsoidine  
paralel düzlem



Şekil - 4

$$a_{ik} V_{z_{ik}}^{cc} + a_{km} V_{z_{km}}^{cc} + a_{mi} V_{z_{mi}}^{cc} + 1/2 a_{ik} \gamma_{ik}^{cc} k_i + 1/2 a_{km} \gamma_{km}^{cc} k_k$$

$$+ 1/2 a_{mi} \gamma_{mi}^{cc} k_m + a_{ik} \cos \alpha_{ik} \xi_i^{cc} + a_{ik} \sin \alpha_{ik} \eta_i^{cc} + a_{km} \cos \alpha_{km} \xi_k^{cc} \quad (32)$$

$$+ a_{km} \sin \alpha_{km} \eta_k^{cc} + a_{mi} \cos \alpha_{mi} \xi_m^{cc} + a_{mi} \sin \alpha_{mi} \eta_m^{cc} - \Delta h'_{ik} - \Delta h'_{km} - \Delta h'_{mi} = 0$$

olarak yazılır.

Başka bir tür hata denklemi de

$$V_{w_{ik}} = \xi_k \cos \alpha_{ik} + \eta_k \sin \alpha_{ik} - \xi_i \cos \alpha_{ik} - \eta_i \sin \alpha_{ik} + W_{ik} \quad (33)$$

dir. Burada  $w_{ik} = z'_{ik} + z'_{ki} - 200^g$  dır. Bu hata denklemleri bir kenar ağı için kurulmuş hata denklemlerine benzer ve normal denklemlerin çözümü için aynı koşullar geçerlidir. Bu demektir ki, bilinmesi gereken değişmez sayısı üç olacaktır. Bunun için de bir noktadaki çekül sapması bileşenleri ile bir başka noktadaki bileşenlerden biri bilinen alınmalıdır. Alınamıyorsa serbest dengeleme söz konusu olur. Ancak bu durumda başlangıç çekül doğrultusu ve ağ datumu bilinmediğinden yinelemeli ölçülere göre hesap yapıldığında değişik sonuçlar elde edilecektir.

Üç boyutlu jeodezik ağların dengelenmesinde de çekül sapması bileşenleri bilinmeyen olarak elde edilerek, yatay ve düşey açılar düzeltilir. Başucu açıları ve kuzeye yöneltilmiş yatay doğrultular için hata denklemleri,

$$\begin{aligned} V_{z_{ik}}^{cc} &= \frac{1}{\rho^{cc} a_{ik}} M \cos \alpha_{ik} \cot(z'_{ik} - 1/2 \gamma_{ik}) d\varphi_i^{cc} - \frac{1}{\rho^{cc} a_{ik}} N \cos \varphi_i \\ &\quad \sin \alpha_{ik} \cot(z'_{ik} - 1/2 \gamma_{ik}) d\lambda_i^{cc} - \frac{1}{\rho^{cc} a_{ik}} M \cos \alpha_{ik} \cot \\ &\quad (z'_{ik} - 1/2 \gamma_{ik}) d\varphi_k^{cc} - \frac{1}{\rho^{cc} a_{ik}} N \cos \varphi_k \sin \alpha_{ki} \cot(z'_{ik} - \gamma_{ik}) \\ &\quad d\lambda_k^{cc} + \frac{1}{a_{ik}} dh_i - \frac{1}{a_{ik}} dh_k - 1/2 \gamma_{ik}^{cc} k_i - \cos \alpha_{ik} \xi_i^{cc} - \sin \alpha_{ik} \eta_i^{cc} + \\ &\quad + \frac{1}{a_{ik}} (h_i^0 - h_k^0 + \Delta h'_{ik}) \end{aligned} \quad (34)$$

ve

$$\begin{aligned} V_{\alpha_{ik}}^{cc} &= \frac{M \sin \alpha_{ik}}{S'_{ik}} d\varphi_i^{cc} - \frac{N \cos \varphi_i \cos \alpha_{ik}}{S'_{ik}} d\lambda_i^{cc} \\ &\quad + \frac{M \sin \alpha_{ik}}{S'_{ik}} d\varphi_k^{cc} - \frac{N \cos \varphi_i \cos \alpha_{ki}}{S'_{ik}} d\lambda_i^{cc} \\ &\quad + \sin \alpha_{ik} \cot z'_{ik} \xi_i^{cc} - \cos \alpha_{ik} \cot z'_{ik} \eta_i^{cc} - o_i^{cc} + (\alpha_{ik}^0 - \alpha'_{ik}) \end{aligned} \quad (35)$$

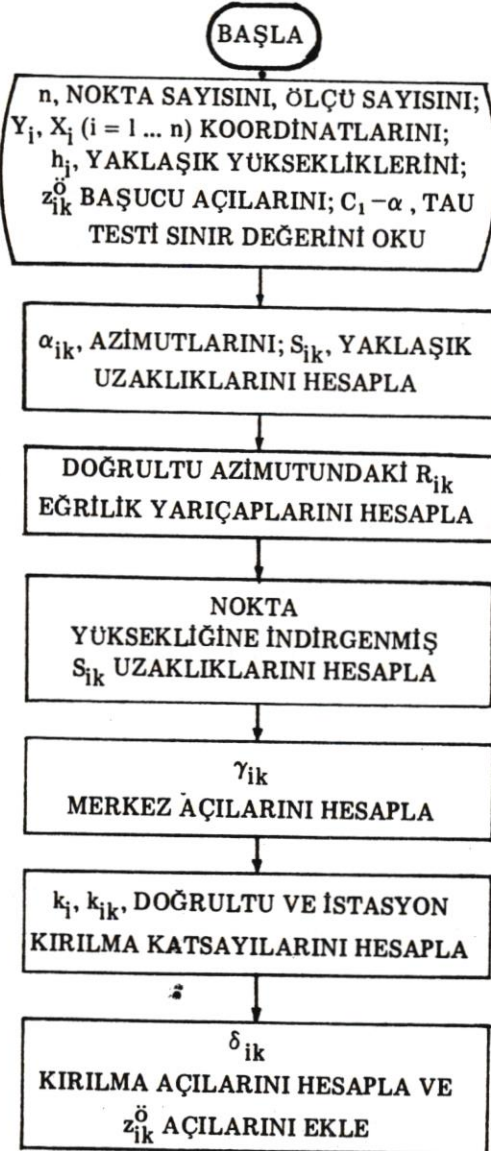
biçimindedir.

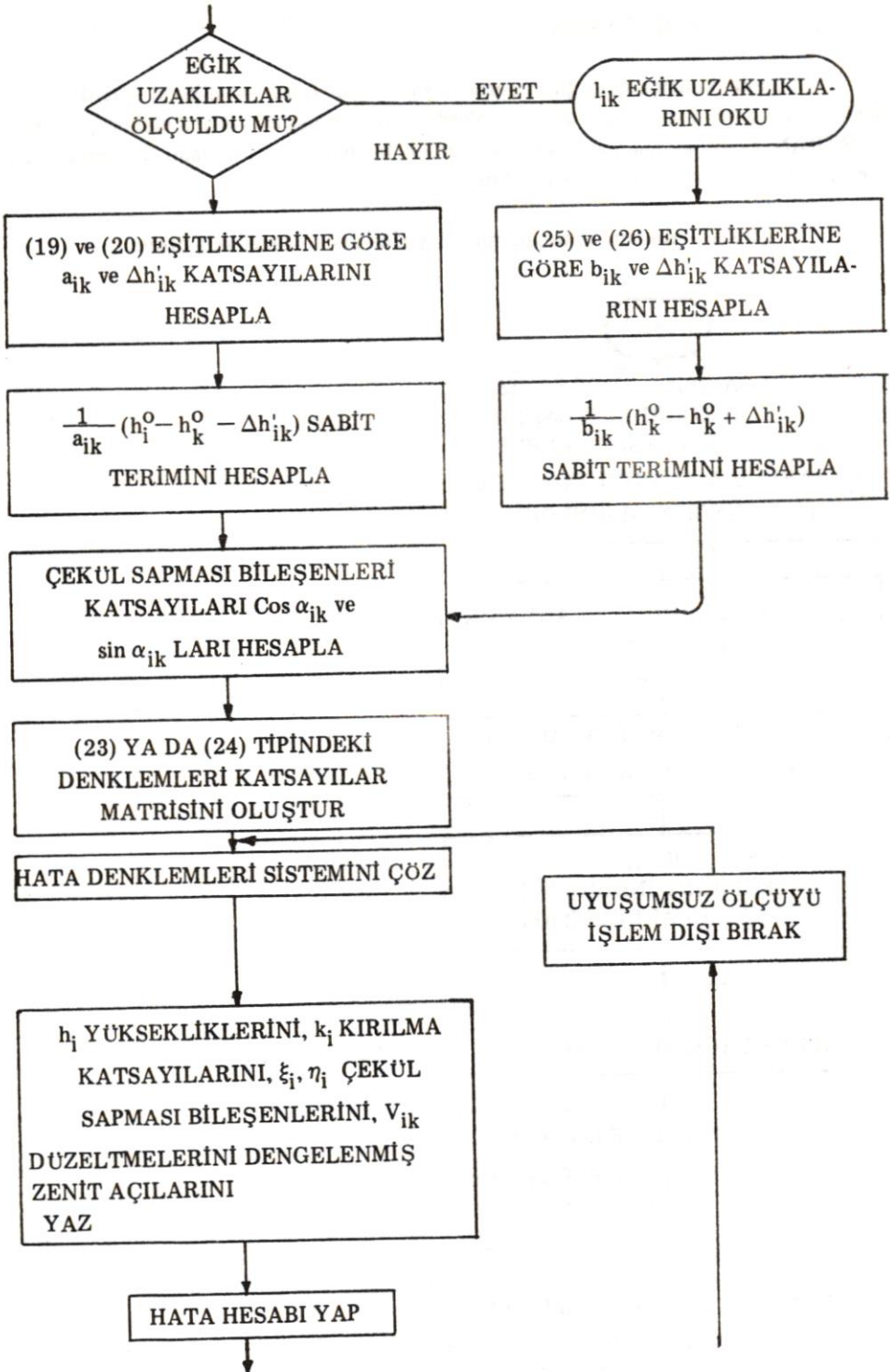
Dengelenen ağ içerisinde doğrultu eğimleri  $5^\circ$  yi aşmıyorsa, sorunu tek ve iki boyuta indirgeyerek çözmek daha uygun olacaktır. Çünkü  $\cot z_{ik}$  nın bulunduğu yatay koordinatları içeren terimler önemsiz büyüklükte olacaktır. Bu demektir ki, (34), (23)'e yani yalnızca yükseklik boyutunu içeren hata denkleminde dönüşecektir. Bunun bilgisayar zamanı açısından önemli olması yanında duyarlık aynıdır.

#### 4- MODELİN DENENMESİ

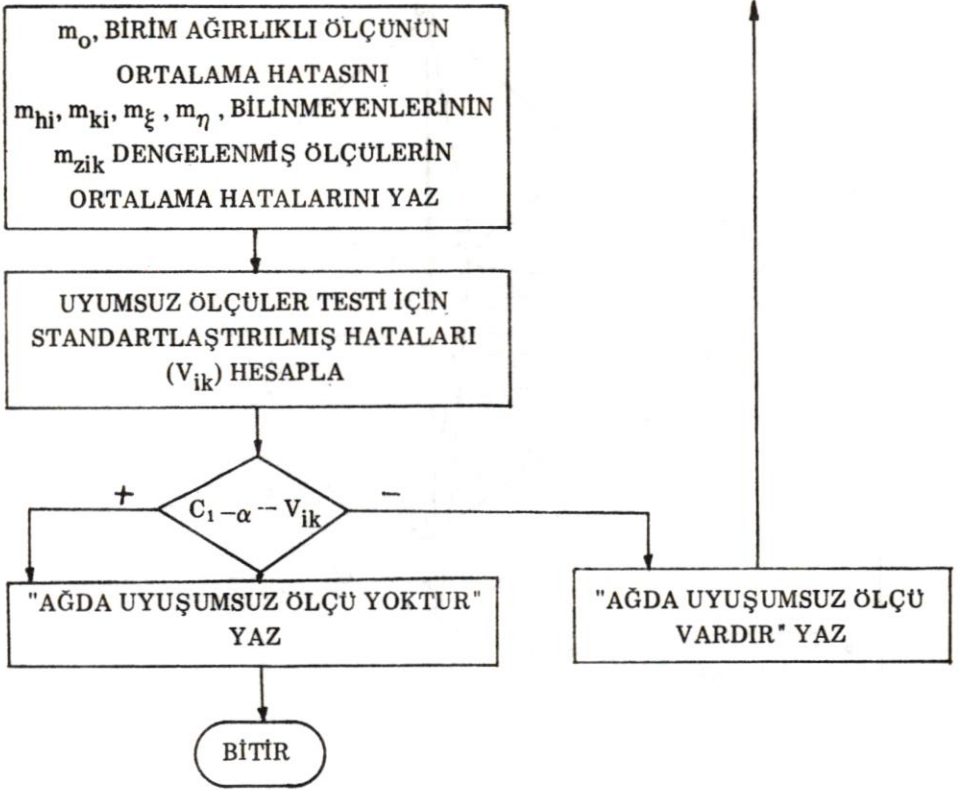
Yöntemin kullanılabilirliğinin gerçekleşmesi için farklı özellikteki ağlarda çalışmak istenmiş ve bunun için de girişimlerde bulunulmuştur. Ağlara ilişkin çözümler FORTRAN 77 programlama dilinde geliştirilen bir bilgisayar programı ile yapılmıştır. Program akışı Çizem 1 (şema) de görülmektedir.

Çizem 1- Kullanılan programın işleyişine ilişkin genel akış çizemi





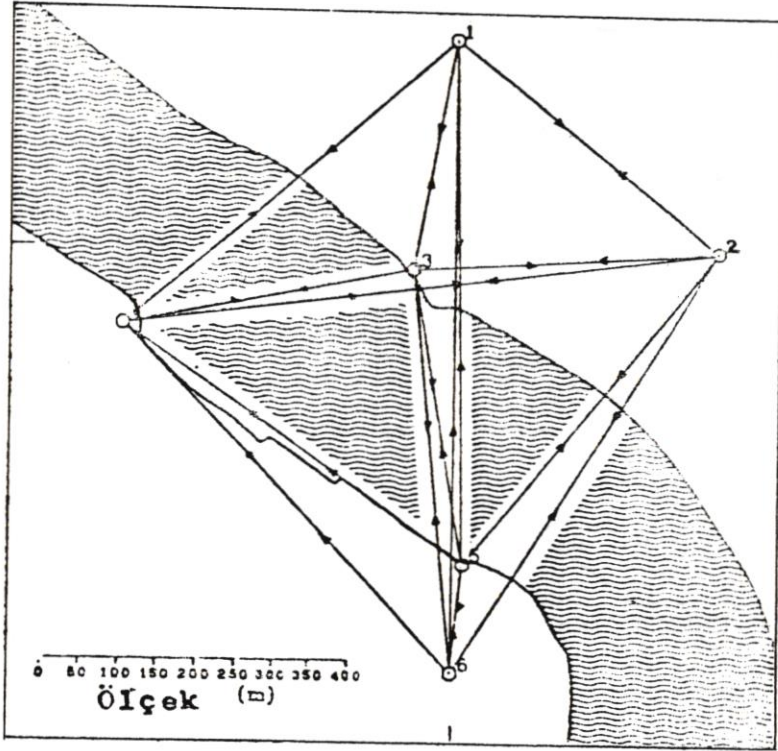




## LORELEY TEST AĞI

İlk uygulama topografik yapısı oldukça bozuk olan Loreley Test ağında yapılmıştır (Şekil 5). Darmstadt Teknik Üniversitesi tarafından yüksek duyarlı kırılma araştırmaları için kurulan ağda, kırılmanın çekül sapmalarından ayrı olarak belirlenebilmesi sorunu bütünlük jeodezi dengelemesi ile giderilmeye çalışılmıştır.

Bütünlük çözümde 1980 jeodezik referans sistemi kullanıldığından, burada da aynı sistem alınmıştır. Başucu açılarının özgün değerleri elde olmadığından,  $\Delta_{zik}$  ve  $\Delta_{kik}$  değişimleri incelenememiş ve hesaba ortalama değerler ile girilmiştir. Çizelge 3'te görüldüğü gibi üç değişik çözüm yapılmıştır. Karşılaştırma açısından, diğer yöntemlere göre belirlenen çekül sapması bileşenleri ile bölge kırılma katsayısı modelinin kullanıldığı 2. çözüm, birlikte Çizelge 4'te verilmiştir. Diğer yöntemlerle bütünlük jeodezi dengelemesi arasında ortalama fark 0.5" iken, başucu açılarına göre belirlenenler arasındaki ortalama fark 0.8" olmuştur. Çekül sapması bileşenlerinin ortalama hataları, ortalama olarak 2. çözümde  $\pm 1.5''$ , 3. çözümde  $\pm 0.6''$  olarak elde edilmiştir. Bütünlük çözümdekinin  $\pm 0.6''$  olduğu göz önüne alınırsa, istenen duyarlılığın sağlandığı söylenebilir.



Şekil - 5

	1. ÇÖZÜM			2. ÇÖZÜM			3. ÇÖZÜM				
	$\xi \pm m_\xi$ $\eta \pm m_\eta$	$h \pm m_h$ (m)	k	$\xi \pm m_\xi$ $\eta \pm m_\eta$	$h \pm m_h$	k	$\xi \pm m_\xi$ $\eta \pm m_\eta$	$h \pm m_h$	k		
"	m	m		m	m		"	m			
1	2.1±2.4	258.520 ±2.1	0.457	1.3±1.8 1.0±0.7	258.521 ±1.8		1.4±0.5 1.1±0.7	258.520 ±0.8			
2	1.8±0.7 1.4±3.2	264.253 ±3.4	0.416	1.9±0.6 0.7±2.4	264.254 ±2.8		1.9±0.6 1.2±0.6	264.253 ±1.0			
3	3.9±0 0.3±0	111.216 ±0.0	0.451	0.9±0 0.3±0	111.216 ±0.0		0.9±0.0 0.3±0.0	111.216 ±0.0			
4	2.6±0.7 0.8±3.2	109.440 ±2.7	0.320	3.1±0.7 0.1±2.2	109.440 ±2.2	0.331	2.9±0.6 2.2±0.5	109.440 ±0.9			
5	2.1±2.4 2.2±0.8	108.708 ±2.5	0.258	1.7±2.0 2.2±0.8	108.710 ±1.9		1.1±0.4 2.2±0.7	108.709 ±0.7			
6	4.0±3.3 2.2±0.8	221.767 ±5.5	0.327	3.8±3.0 2.2±0.8	221.768 ±4.4		2.0±0.5 2.5±0.8	221.766 ±1.0			
$m_{0,z} = \pm 1.53^{cc}$				$m_{0,z} = \pm 1.61^{cc}$				$m_{0,z} = \pm 1.73^{cc}$			

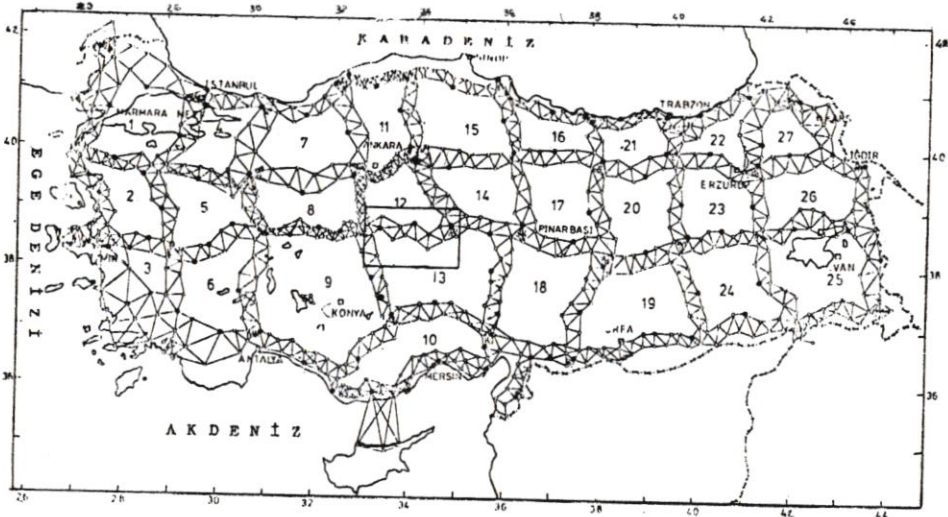
$k_0 = 0.38C$   
 KIRILMA KATSAYISI DENGEELEMEYE SOKULMADI

Çizelge 3- Loreley Test Ağı hesap sonuçları.  
 Altı çizili değerler değişmez olarak alınmıştır.

NOKTA	TOPOGRAFIK YÖNTEM		GRAVİMETRİK YÖNTEMLER						BÜTÜNLEŞİK JEODEZİ DENGELMESİ		ASTRO-JEODEZİK YÖNTEM		TRİGONOMET. NİVELMAN AĞI DENGELMESİ	
			VENİNG-MEINLŞZ		TOPOGRAFIK DOZELTME		MOLODENSKY							
	$\xi''$	$\eta''$	$\xi_0''$	$\eta_0''$	$\xi_1''$	$\eta_1''$	$\xi''$	$\eta''$	$\xi''$	$\eta''$	$\xi''$	$\eta''$	$\xi''$	$\eta''$
1	0.7	-0.7	1.4	-0.8	0.5	-0.1	1.9	-0.9	-0.1	-0.2	-	-0.1	1.3	1.0
2	1.5	-1.7	0	-2.7	0.3	0.2	0.3	-2.5	1.2	-1.6	1.2	-2.3	1.9	0.7
3	1.0	-0.3	1.5	-0.2	-0.1	0.0	1.4	-0.3	1.0	-0.2	0.9	0.3	0.9	0.3
4	2.5	1.1	3.0	0.8	0.0	-0.2	3.0	0.6	2.6	0.6	3.5	1.1	3.1	0.1
5	2.2	1.0	2.0	1.0	0.1	0.2	2.1	1.2	1.2	0.7	1.1	1.6	1.7	2.2
6	2.1	1.8	2.9	2.1	-0.5	0.1	2.3	2.2	3.6	2.6	1.7	-	3.8	2.2

Çizelge 4- Çekül sapması bileşenlerinin karşılaştırılması

Türkiye Birinci Derece Nirengi Ağı 12. Poligon

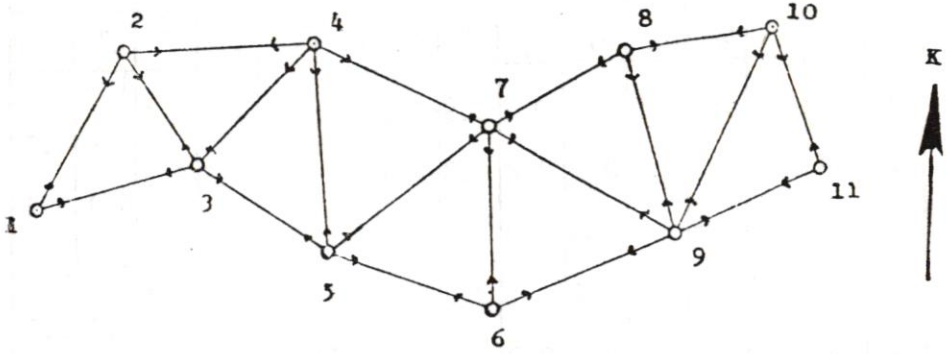


Şekil 6- Türkiye Birinci Derece Nirengi Ağı

0 50 100 200 km  
ÖLÇEK

Uzun kenarlı bir ağda yöntemi denemek için, Şekil 6'da görülen Türkiye 1. Derece Nirengi ağı 12. Poligonunun Şekil 7'de görülen bölümünde uygulama yapılmıştır. Fazla ölçü sayısının artırılması olanaklı olmamıştır.

4 ve 10 No'lu noktalara ilişkin çekül sapması bileşenleri ile 4 No'lu noktaya ilişkin yükseklik değeri değişmez olarak alınmıştır. 38 ölçüye karşılık, 16 çekül sapması bileşeni, 10 yükseklik ve 1 de kırılma katsayısı bilinmeyeniyi vardır.



Lapas Noktası  
Birinci Derece Nokta

Şekil - 7

Çözüm sonucu uyumsuz ölçü çıkmamıştır. Ancak 4-2 ve 4-3 doğrultularından kuşku duyulmuş ve işlem dışı bırakılmıştır. Bu durumda duyarlıktaki iyileşmeyi Çizelge 5'te gözleyebiliriz.

	42 - 43 işlemde	42 - 43 işlem dışı
$m_{\xi}^{or}$	$\pm 4.31''$	$\pm 3.00''$
$m_k$	$\pm 0.0021$	$\pm 0.0015$
$m_h^{or}$	$\pm 59.45$ cm	$\pm 44.99$ cm
$m_{oz}$	$\pm 10.83^{cc}$	$\pm 7.15^{cc}$

Çizelge 5- Ortalama hatalar

Duyulan kuşkuyu güçlendirmek için bu kez 1,2 ve 3 No'lu noktalar ağdan çıkarılarak iki noktanın değişmez alındığı diğer bölüm dengelenmiştir. Sonuçlar arasındaki farkın 0.25'' olması duyulan kuşkuyu doğrulamıştır. Her iki çözüm sonuçları Çizelge 6'da yer almaktadır. Çekül sapması bileşenleri ortalama olarak 2.8'' ve 3.0'' lik ortalama hatalarla elde edilmiştir.



HA	1			2		
	$\xi'' \pm m''_{\xi}$	$\eta'' \pm m''_{\eta}$	$h \pm m_h$ (m)	$\xi'' \pm m''_{\xi}$	$\eta'' \pm m''_{\eta}$	$h \pm m_h$ (m)
(23)	-7.0±0.0	-3.0±0.0	1156.06±0.484	-	-	-
(22)	0.9±3.2	-3.1±3.3	1648.31±0.456	-	-	-
(21)	-2.9±2.7	-4.5±2.8	1565.51±0.305	-	-	-
(20)	-11.928±0.0	-1.670±0.0	1024.91±0.000	-11.928±0.00	-1.670±0.0	1024.91±0.000
(19)	4.1±3.2	1.3±2.6	1505.83±0.284	5.4±4.2	1.7±4.0	1505.98±0.416
(18)	1.7±4.3	5.3±2.7	1322.01±0.482	3.1±5.3	5.5±3.2	1322.18±0.543
(17)	-5.4±2.6	-5.2±2.4	1035.74±0.252	-4.6±3.1	-5.1±2.7	1035.76±0.279
(16)	-7.4±3.2	3.2±2.6	1493.85±0.478	-7.1±3.4	3.1±2.7	1493.85±0.541
(15)	-9.3±3.1	-0.9±2.5	1684.29±0.526	-8.3±3.8	-1.0±2.6	1684.37±0.563
(14)	-1.129±0.0	-1.588±0.0	1167.87±0.578	-1.129±0.0	-1.588±0.0	1167.88±0.644
(14)	-4.7±3.0	2.1±4.0	1768.72±0.654	-4.2±3.4	2.0±4.2	1768.77±0.699
k = 0.1132 ± 0.0015 , m <sub>oz</sub> = ± 7.145 <sup>cc</sup>			k = 0.1127 ± 0.0023 , m <sub>oz</sub> = ± 7.489			

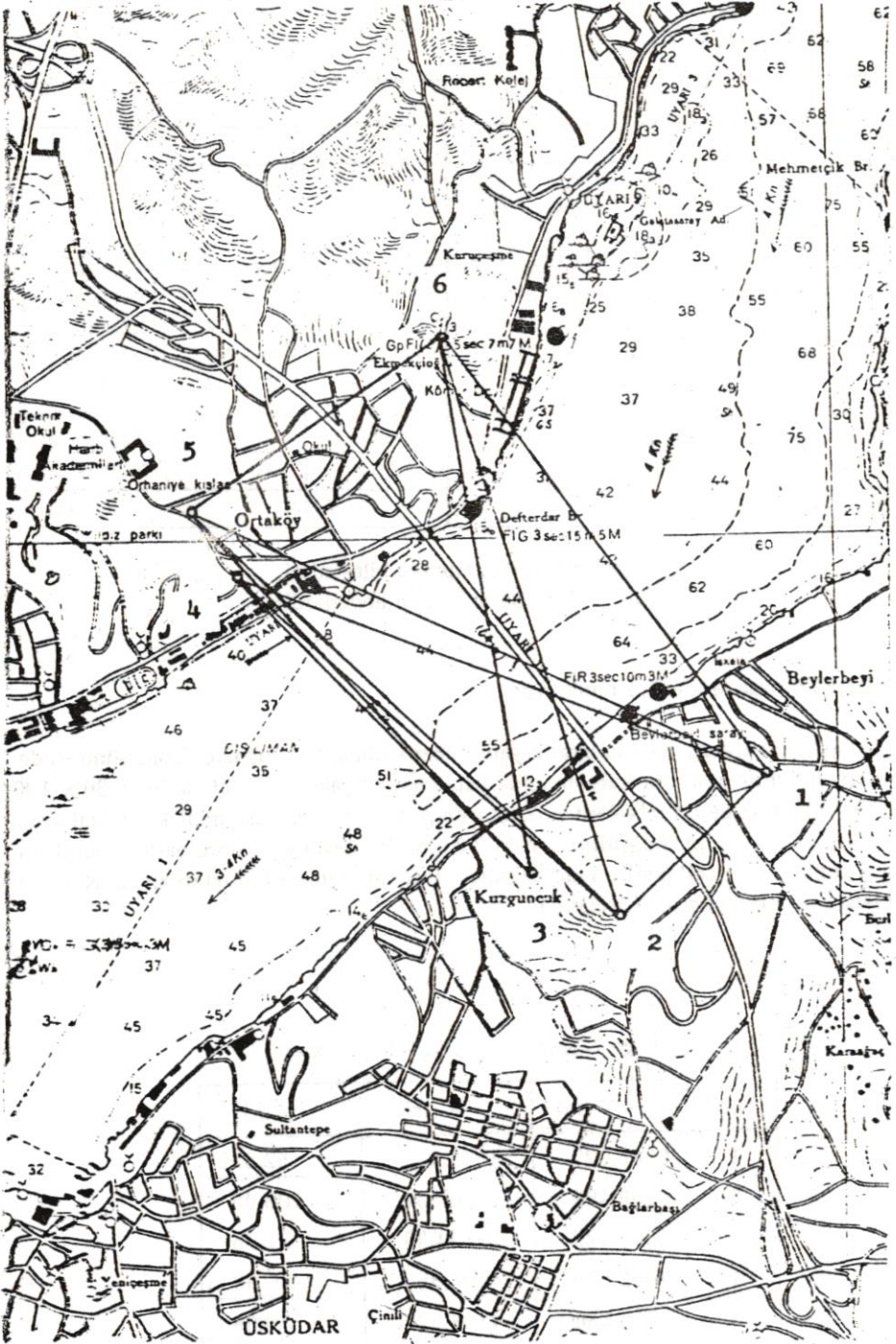
Çizelge 6- Çekil sapması bileşenleri.  
Altı çizili değerler bilinen değerlerdir.

#### Boğaziçi Köprüsü Jeodezik Konum Ağı

Başka bir uygulama, topografik yapısı bozuk olmayan, Boğaziçi Köprüsündeki deformasyon belirlemesi için kurulan ağda yapılmıştır (Şekil 8). Noktalar 30 x 30 x 120 cm. boyutlarında beton pilyelerden oluşturulup, bir noktadan İstanbul koordinat sistemine bağlanmış, yatay doğrultular Wild T3 aleti ile ölçülerek koordinatlar dengeleme hesabı sonucu elde edilmiştir. Yine İstanbul nivelman ağına RS noktalarından Ni 02 ile noktalara kot taşınmıştır. (Çizelge 7)

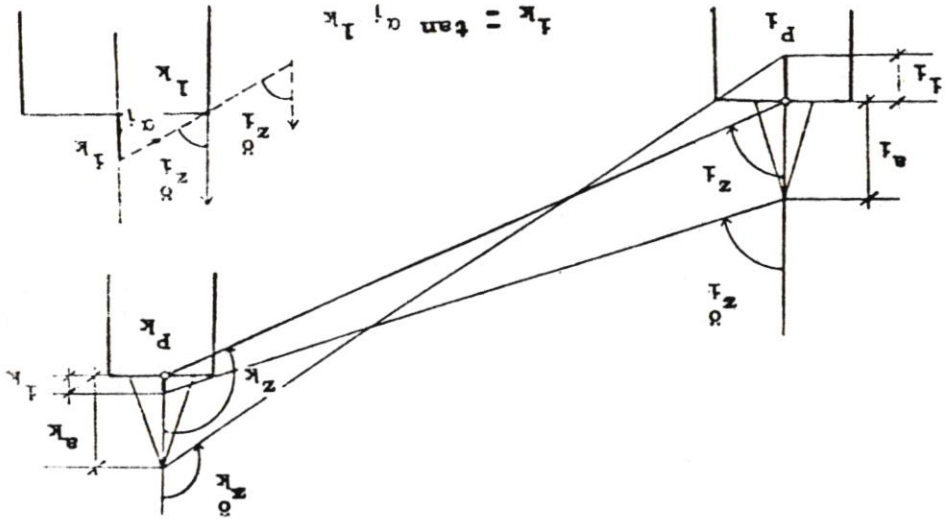
Çizelge 7- Koordinatlar ve Yükseklikler

N.N.	Y (m)	X (m)	H (m)
1	6645.037	1931.334	52.492
2	6106.499	2499.834	106.08
3	6309.722	2812.030	51.76
4	7452.529	4005.855	46.984
5	7716.534	4163.326	70.06
6	8419.218	3167.116	112.50



Şekil 8- Boğaziçi Köprüsü Jeodezik Konum Ağı

Altı noktaya birden alet kurularak aynı anda ve karşılıklı olarak başucu açısı ölçüleri, kırılma değişimlerinin en az olduğu öğle saatlerinde üzer dizilik iki grup halinde yapılmıştır. Gözlemler pilye kenarlarının düzgünlüğü nedeni ile Şekil 9'daki gibi yapılmış, başucu açılarını pilye orta noktalarına dönüştürmede en çok 10 mm olan görünür hedef boyları gözönüne alınmıştır.



Şekil 9- Oluşan hedef yükseklikleri

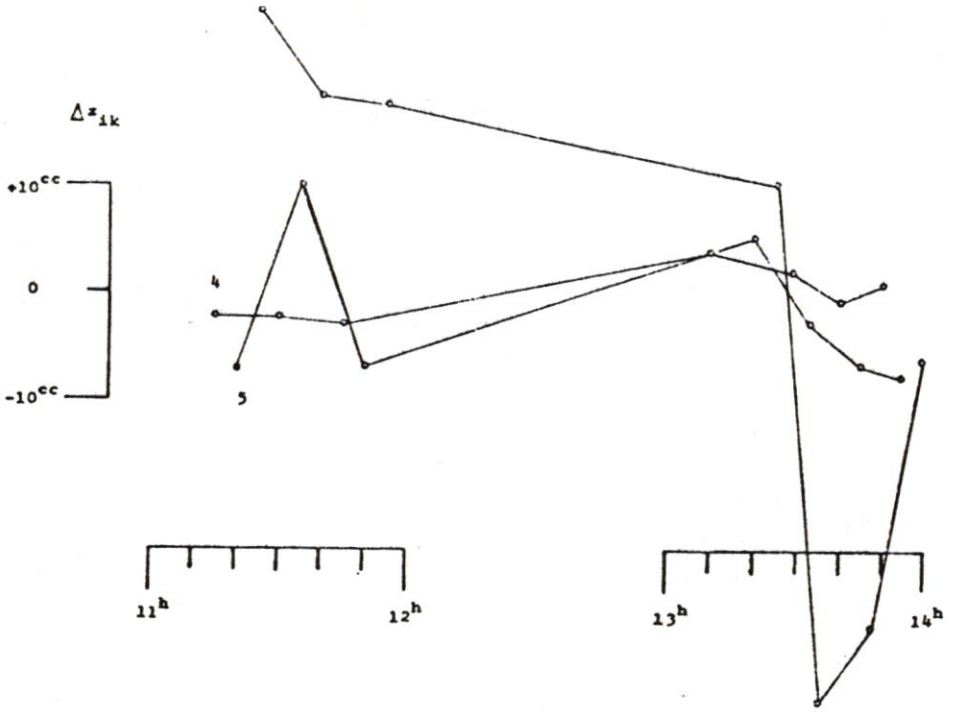
Tüm doğrultulardaki başucu açısı ve kırılma değişimlerinin çizgeleri oluşturulmuş, 2-1 doğrultusunda aykırılık görülmüştür (Çizge. 1, Çizge. 2). Örneğin 4 No'lu noktada ise aykırı doğrultu yoktur (Çizge. 3, Çizge. 4).

Çizelge 8- Pilye üzerine dönüştürülmüş başucu açıları (grad)

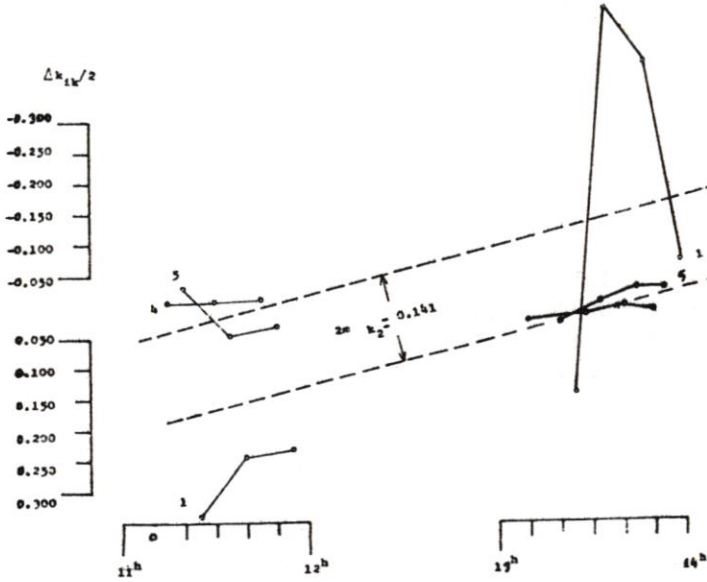
N.N.	1	2	3	4	5	6
1		95.66546		100.16805	99.56091	98.24449
2	104.34165			101.86560	100.99585	
3				100.18725	99.40956	98.20065
4	99.85164	98.15109	99.82816			
5	100.46248	99.02326	100.60906			
6	101.77069	100.18432	101.81919		102.22109	

1 No.lu noktadaki çekül sapması bileşeninin sıfır olarak alındığı çözüm sonucunda da 6-1 doğrultusundaki ölçü uyumsuz çıkmış, ölçü atıldıktan sonra yeniden dengeleme yapılmıştır. Ağırlık olarak (N. Wunderlin 1967)'de önerilen  $p = \sqrt{n} : 10'$  un alındığı dengeleme sonuçları çizelge 9'da görülmektedir. Ortalama olarak  $\mp 3.7''$  lik bir ortalama hata ile çekül sapması bileşenleri belirlenmiştir. Ayrıca başka bir doktora çalışmasında

yakın tarih ve saatler için yakın bir bölgede 0.033 olarak bulunan kırılma katsayısı, burada 0.047 olarak elde edilmiştir.

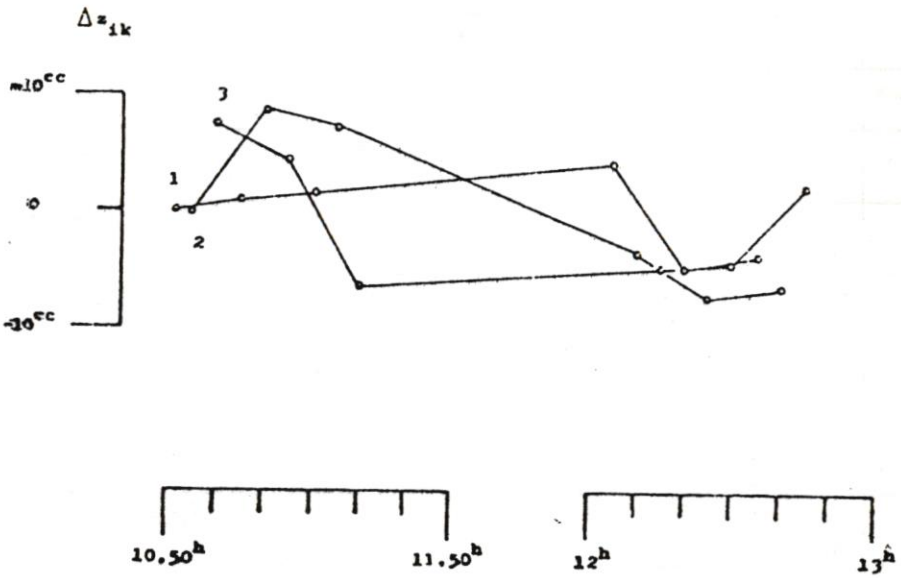


Çizge 1- 2 No'lu noktadaki başucu açısı değişimleri

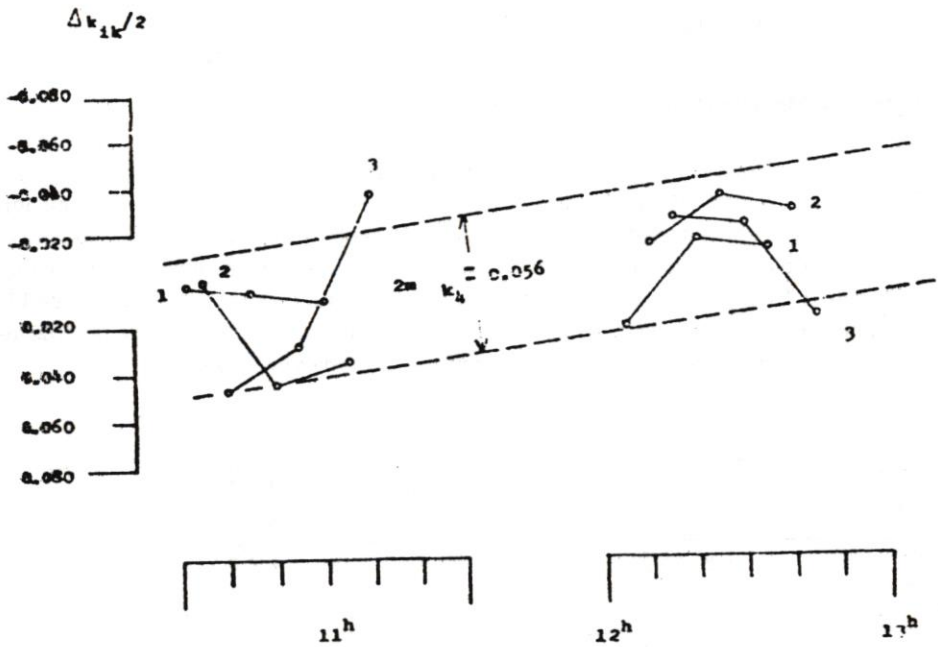


Çizge 2- 2 No'lu noktadaki kırılma değişimleri





Çizge 3- 4 No'lu noktadaki başucu açısı değışimleri



Çizge 4- 4 No'lu noktadaki kırılma değışimleri

1 $m_z \pm 1.45''$ , $m_{\xi, \eta}^{OR} \pm 3.7''$			2 $m_z \pm 1.46''$ , $m_{\xi, \eta}^{OR} \pm 3.8''$			3 $m_z \pm 1.60''$ , $m_{\xi, \eta}^{OR} \pm 3.8''$			
N.N.	$\xi \pm m_{\xi}$ $\eta \pm m_{\eta}$	$k \pm m_k$	$h \pm m_h$ (m)	$\xi \pm m_{\xi}$ $\eta \pm m_{\eta}$	$k \pm m_k$	$h \pm m_h$ (m)	$\xi \pm m_{\xi}$ $\eta \pm m_{\eta}$	$k \pm m_k$	$h \pm m_h$ (m)
1	<u>0.0.0</u> -0.0.0	0.098	52.512±0.0141	<u>0.0.0</u> 0.0.0	0.046	52.492±0.0000	0.0.0 0.0.0	0.098	52.492±0.0000
2	5.7±2.4 -4.4±1.8	KIRILMA KATSAYISI DENGELENE İÇERSİNE ALINMADI	105.958±0.0153	6.6±2.7 -3.5±1.6	0.037 +	105.941±0.0065	4.6±2.5 -3.3±1.7	KIRILMA KATSAYISI DENGELENE İÇERSİNE ALINMADI	105.938±0.0069
3	-2.7±3.2 -3.0±4.4		51.661±0.0178	-1.6±3.1 -1.5±3.9		51.644±0.0136	-1.2±3.4 0.2±4.1		51.644±0.0149
4	5.9±5.3 4.6±3.6		<u>46.984±0.0000</u>	4.6±5.2 7.0±3.8		<u>46.984±0.0000</u>	4.5±5.7 5.0±3.8		<u>46.984±0.0000</u>
5	0.1±5.5 -3.1±4.1		70.029±0.0134	-1.7±5.5 0.7±4.5		70.033±0.0150	-0.5±5.9 -2.1±4.4		70.022±0.0138
6	0.2±2.6 -3.3±3.8		112.485±0.0226	-2.7±3.7 -1.3±3.5		112.484±0.0221	1.0±2.8 -1.0±3.8		112.465±0.0190

Çizelge 9- Boğaziçi Köprüsü Deformasyon ağı çekül sapması bileşenleri, kırılma katsayısı ve yükseklikler. Altı çizili değerler değişmezlerdir.

### Üç Boyutlu Modelin Denenmesi

Üç boyutlu hesapla çekül sapması bileşenlerini elde etmek için uygun koşulları sağlayan Loreley Test Ağı seçilmiş, kuzeye yöneltilmiş yatay doğrultular ve başucu açıları tek bir modelde dengelenerek çekül sapması bileşenleri elde edilmiştir. Ancak, önceden yatay ve düşey konum dengelenmesi ayrı ayrı yapılarak ağırlık belirlemesi yapılmıştır. Çözümler Çizelge 10'da karşılaştırma için de bütünlük çözüm sonuçları Çizelge 11'de verilmiştir. Aradaki farklar, bütünlük çözümde çok ölçü kullanılması ve bu çözümde azimutların paftadan yaklaşık olarak alınması biçiminde yorumlanabilir.

$(\rho \pm m_{\rho})$ $\rho \pm m_{\rho}$	$(\alpha \pm m_{\alpha})$ $\lambda \pm m_{\lambda}$	(m) (mm) $h \pm m_h$	(") (") $\xi \pm m_{\xi}$	(") (") $\eta \pm m_{\eta}$
<u>5077.3089±0</u>	<u>7°43'14.9934±0</u>	258.520±0.8	1.7±0.5	0.7±0.7
<u>5077.47614±1.1</u>	<u>7°43'32.6264±3.2</u>	264.254±1.1	1.9±0.6	1.2±0.6
<u>5077.71894±0</u>	<u>7°43'12.54244±0</u>	<u>111.216±0.0</u>	<u>0.9±0.0</u>	<u>0.3±0.0</u>
<u>5077.50802±1.3</u>	<u>7°42'53.7909±4.1</u>	109.440±0.8	3.0±0.6	-0.7±0.5
<u>5077.53980±2.8</u>	<u>7°43'16.2642±1.5</u>	108.709±0.7	0.9±0.5	2.0±0.7
<u>5077.8290±3.5</u>	<u>7°43'15.6995±1.5</u>	221.767±1.3	3.0±0.5	2.2±0.8

Çizelge 10- Loreley Test Ağı üç boyutlu çözüm sonuçları. Altı çizili değerler değişmezlerdir.

$\varphi \pm m_\varphi$	$\lambda \pm m_\lambda$	$h \pm m_h$	$\xi \pm m_\xi$	$\eta \pm m_\eta$
$50^{\circ}57'30.89 \pm 0.4$	$7^{\circ}43'14.9934 \pm 0.4$	$258.518 \pm 0.8$	$-0.1 \pm 0.7$	$-0.2 \pm 0.6$
$50^{\circ}57'7.7614 \pm 0.4$	$7^{\circ}43'32.6248 \pm 0.4$	$264.252 \pm 1.0$	$1.2 \pm 0.6$	$-1.6 \pm 0.8$
$50^{\circ}57'7.71894 \pm 0.0$	$7^{\circ}43'12.54244 \pm 0.0$	$111.216 \pm 0.0$	$1.0 \pm 0.5''$	$-0.2 \pm 0.5''$
$50^{\circ}57'5.0805 \pm 0.3$	$7^{\circ}42'53.7921 \pm 0.3$	$109.440 \pm 0.9$	$2.6 \pm 0.6$	$0.6 \pm 0.7$
$50^{\circ}57'5.3986 \pm 0.3$	$7^{\circ}43'16.2648 \pm 0.3$	$108.709 \pm 0.8$	$1.2 \pm 0.5$	$0.7 \pm 0.5$
$50^{\circ}57'5.8304 \pm 0.3$	$7^{\circ}43'15.7000 \pm 0.4$	$221.764 \pm 1.1$	$3.6 \pm 0.7$	$2.6 \pm 0.6$

Çizelge 11- Bütünleşik Çözüm Sonuçları

## 5- SONUÇ

Astro-jeodezik yöntemle belirlenen çekül sapması bileşenlerinin duyarlılığı 1.5'' - 2'' olup, trigonometrik nivelman ağlarının ya da üç boyutlu ağların dengelenmesiyle sıklaştırmada bu büyüklüğün 1.5'' - 3'' ye ulaştığı göz önüne alınır, yöntemi karşılaştırma açısından Loreley Test Ağında yapılan uygulamada ortalama olarak 1.5'' ve 0.6'' olarak, Türkiye koşullarındaki hesap için, 1. derece nirengi ağı 12. poligonda yapılan uygulamada 2.8'' ve Boğaziçi Jeodezik Konum Ağında 3.8'' lik karesel ortalama hata ile çekül sapması bileşenlerinin elde edilmesi, başucu açıları ile çekül sapmalarının sıklaştırılması yönteminin kullanılabilirliğini gösterir (West Tatra ve St. Gotthard ağları için bu büyüklük 2.5'' ve 1.8''dir).

Yapılan bu değerlendirmelerden sonra gerek yerel ağlarda, gerekse uzun kenarlı ağlarda başucu açısı ölçüleriyle çekül sapmalarının sıklaştırılması yönteminin hız, zaman ve maliyet yönünden üstün, sağladığı duyarlık yönünden yeterli olduğu söylenebilir ve şu öneriler getirilebilir:

- o Büyük ölçekli haritası yapılmamış dağlık alanlarda harita üretimini hızlandırma,
- o Az sayıda astronomik ölçü yaparak jeoid biçiminin belirlenmesinde,
- o Bayındırma projeleri ve yer kabuğu hareketlerinin saptanması için kurulan ağlarda yüksek duyarlığın sağlanmasında

bu yönteme göre elde edilen çekül sapmalarından yararlanılabilir.

Ancak, birçok araştırmanın da bulgusu olan, 5° den büyük doğrultu eğimine sahip ağlarda üç boyutlu modelin kullanılması ve yersel kırılma sorununun gözden uzak tutulmaması konuları boşlanmamalıdır.

Schweizerischen Geodaetischen kommission wonderlin, 1967. Lotabweichungen, Geoid und Meereshöten in den schweizer Alpen, Astronomisch - Geodaetische