JEODEZİK AĞLARDA DUYARLIK VE GÜVEN ÖLÇÜTLERİ

Doç. Dr. Ergün ÖZTÜRK
Karadeniz Üniversitesi
Trabzon

ÖZET

Jeodezik ağların kullanma amaçları için yeterli olup olmadıklarının denetlenmesi konusunda günümüze kadar kullanılagelen duyarlık ölçütleri tanıtılmaktadır. Daha ağın planlanması aşamasında duyarlık yönünden zayıf, kullanma amaçları için yetersiz görülen noktalar ve bu yetersizliklerin oluştuğu doğrultular, duyarlık ölçütleri ile belirlenebilmekte, gereğinde önlem alınabilmektedir.

Duyarlık ölçütleri, dengeleme hesabının geçerli bir model hipotezi ile yapıldığı varsayımına dayanarak elde edilen büyüklüklerdir. Bu nedenle dengeleme hesabının matematik modelinin ölçülerle bilinmeyenler arasındaki geometrik ilişkilere uygun olup olmadığı, ölçülerin duyarlıklarını ve aralarındaki korelasyonları yeterince yansıtıp yansıtmadığı, güven ölçütleri ile denetlenmektedir.

Kısaca söylenirse, duyarlık ölçütleri ile jeodezik ağların kalitesi, güven ölçütleri ile de model hataları denetlenmektedir.

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird hier die Kriterien zur Beurteilung der Genauigkeit und Zuverlaessigkeit der gedaetischen Netze diskutiert. Durch die Genauigkeitsmassen wird noch in der planungsphase die Schwachstellen im Netz aufgedeckt und die erforderlichen Massnahmen ausgeführt.

Die Berechnung von Genauigkeitsmassen führt nur dann zu korrekten Aussagen über die güte des Netzes, wenn das Ausgleichungsmodell gültig ist. Aus diesem Zwecke wird die Anpassung des mathematischen Modells zu der geometrischen und phsikalischen Beziehungen zwischen den Beobachtungen und Unbekannten sowie zu der Stochastischen Eigenschaften der Beobachtungen durch die Zuverlaessigkeitsmassen getestet.

Darüber hinaus kann die Oualitaet des Netzentwurfs durch die Genauigkeitskriterien und die Sensitivitaet der Realisierung des Netzes durch die Zuverlaessigkeitskriterien beurteilen.

1- GİRİŞ

Jeodezik ağların kullanma amaçları için yeterli olup olmadıkları sorusu, Schreiber (1889)'den günümüze kadar araştırılagelen konulardandır. Kentsel teknik hizmetler ve kadastral amaçlarla yerleşme alanlarında kurulan ağlar ile ülke nirengi ağlarının, kendilerinden beklenen işlevleri yerine getirebilmeleri için duyarlık yönünden homojen olmaları istenir. Buna karşın bölgesel yerkabuğu hareketlerinin araştırılması, barajlar, asma köprüler, asma yollar, tüneller ve maden galerileri gibi büyük mühendislik yapılarında ya da bunların yakın çevrelerinde oluşan deformasyonların denetlenmesi amacıyla kurulan jeodezik ağlarda, konuma ya da doğrultuya bağlı duyarlık istekleri ile karşılaşılır.

Duyarlık kavramını simgeleyen ortalama hata (deneysel standart sapma ya da precision), kaba ve sistematik hatalardan arındırılmış ölçülerle yapılan bir dengeleme sonucunda rastgele ölçü hataları ve ağın geometrik şeklinin etkisiyle oluşan istatistiksel bir büyüklüktür. Jeodezik ağlar için tanımlanan duyarlık ölçütlerinin büyük bir çoğunluğu, ağın dış parametrelerinin (konum, ölçek, yöneltme) seçimine bağlıdır. Ağ noktalarından birkaçının sabit alındığı dayalı ağlarda bağıl duyarlık ölçütlerinden, noktaların tümünün koordinatlarının bilinmeyen olarak seçildiği serbest ağlarda iç duyarlık ölçütlerinden söz edilir.

Duyarlık ölçütleri ancak geçerli bir dengeleme modeli ile yapılan hesaplamalar sonucunda elde edilirlerse gerçekçi olurlar. Buna karşın ölçülerle bilinmeyenler arasındaki geometrik ve fiziksel ilişkileri doğru ve tam olarak kapsamayan bir fonksiyonel model ya da gözlemlerin duyarlıklarını ve aralarındaki korelasyonları yeterince yansıtmayan bir stokastik model ile yapılan hesaplamalar, model hatalarına neden olurlar. Dengeleme modelinin geçerli olup olmadığı ya da ölçülerin değerlendirilmesi aşamasında model hataları oluşup oluşmadığı güven ölçütleri ile denetlenir.

2- DUYARLIK ÖLÇÜTLERİ

Jeodezik ağlar için tanımlanan duyarlık ölçütlerinin büyük bir bölümü, noktalara göre tanımlanan ölçütlerdir. Bunlar, ağ noktalarının koordinatlarının gerçek değerlerinin hangi sınırlar arasında kalacağını belirlemeye yararlar. Bir jeodezik ağın duyarlığına ilişkin bilgilerin tümü, koordinat bilinmeyenlerinin varyans-kovaryans matrislerinde depolanmıştır. Bu nedenle, duyarlık ölçütlerinin hesaplanması için koordinat bilinmeyenlerinin varyans-kovaryans matrisinin tümünden ya da bir bölümünden yararlanılır.

Bir ağda ulaşılabilecek duyarlıklar tahmin edilmek istenirse varyans-kovaryans matrisinin kuramsal değerleri ile, gerçekleştirilen duyarlıklar belirlenmek istenirse varyans-kovaryans matrisinin ölçülerden elde edilen deneysel değerleri ile işlem yapılır.

Nirengi ağının dolaylı (endirekt) ölçüler yöntemi ile dengelenmesi için kurulan, yöneltme bilinmeyenleri ve ölçek katsayıları gibi ek parametreleri indirgenmiş düzeltme denklemleri ile ölçülerin duyarlıkları ve aralarındaki korelasyonlardan yararlanarak oluşturulan matematik model

$$v = Ax - l \qquad P = Q_{ll}^{-1} \qquad K_{ll} = s_o^2\, Q$$

Fonksiyonel Model   Stokastik Model

biçiminde olsun. Buradan Gauss'un en küçük kareler ilkesine göre kurulan normal denklemler

$$A^T P A x - A^T P l = 0$$

eşitliğinden elde edilir. Ağın dış parametrelerinin (konum, ölçek, yöneltme) belirli oldukları durumlarda düzgün (regüler) olan bu denklemlerin çözümü sonucunda koordinat bilinmeyenleri

$$x = (A^TPA)^{-1} A^Tpl$$

eşitliğinden hesaplanır. Bu bağıntıya genel hata yayılma kuralı uygulanarak koordinat bilinmeyenleri vektörü x'in ters ağırlık matrisi

$$Q_{xx} = (A^TPA)^{-1}$$

eşitliğinden elde edilir.

Her ölçmeci, ölçüm yapılan bölgenin topoğrafik yapısına ve meteorolojik koşullara göre eldeki aletlerle hangi duyarlıkta ölçü yapılabileceğini önceden tahmin edebilir. Ağın geometrik şekli ve ölçülerin kuramsal varyanslarından yararlanarak hesaplanan

$$\Sigma_{xx} = \sigma_o^2 \, Q_{xx} \qquad \text{Kuramsal Varyans-Kovaryans Matrisi}$$

duyarlık ölçütlerinin ulaşılabilecek değerlerini hesaplamaya yarar. Buna karşın dengeleme sonunda bulunan

$$m_o^2 = \frac{v^TPv}{n-u} \qquad \text{Birim Ölçünün Ortalama Hatası (Deneysel Varyans)}$$

ile hesaplanan

$$K_{xx} = m_o^2 \, Q_{xx} \qquad \text{Deneysel Varyans-Kovaryans Matrisi}$$

duyarlık ölçütlerinin gerçekleştirilen değerlerini bulmaya yarar. Kuramsal varyans-kovaryans matrisi Σ_{xx}den yararlanarak hesaplanan büyüklüklerin güven aralıkları χ_f^2 $f = n - u$ dağılımından yararlanarak bulunur. Buna karşın deneysel varyans-kovaryans matrisi K_{xx} in kullanıldığı ölçütler için F-Dağılımı (Fisher Dağılımı) geçerlidir.

2.1- Lokal Duyarlık Ölçütleri

Koordinat bilinmeyenlerinin ters ağırlık matrisi aşağıdaki gibi 2 x 2 boyutlu alt matrislere ayrılabilir.

$$Q_{xx} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|ccc}
q_{x1x1} & q_{x1y1} & q_{x1x2} & q_{x1y2} & q_{x1x3} & q_{x1y3} & \cdots & q_{x1xp} & q_{x1yp} \\
q_{y1x1} & q_{y1y1} & q_{y1x2} & q_{y1y2} & q_{y1x3} & q_{y1y3} & \cdots & q_{y1xp} & q_{y1yp} \\
\hline
q_{x2x1} & q_{x2y1} & q_{x2x2} & q_{x2y2} & q_{x2x3} & q_{x2y3} & \cdots & q_{x2xp} & q_{x2yp} \\
q_{y2x1} & q_{y2y1} & q_{y2x2} & q_{y2y2} & q_{y2x3} & q_{y2y3} & \cdots & q_{y2xp} & q_{y2yp} \\
\hline
q_{x3x1} & q_{x3y1} & q_{x3x2} & q_{x3y2} & q_{x3x3} & q_{x3y3} & \cdots & q_{x3xp} & q_{x3yp} \\
q_{y3x1} & q_{y3y1} & q_{y3x2} & q_{y3y2} & q_{y3x3} & q_{y3y3} & \cdots & q_{y3xp} & q_{y3yp}
\end{array}\right.$$

$$
\begin{bmatrix}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\
q_{xpx1} & q_{xpy1} & q_{xpx2} & q_{xpy2} & q_{xpx3} & q_{xpy3} & \cdots\; q_{xpxp} & q_{xpyp} \\
q_{ypx1} & q_{ypy1} & q_{ypx2} & q_{ypy2} & q_{ypx3} & q_{ypy3} & \cdots\; q_{ypxp} & q_{ypyp}
\end{bmatrix}
$$

Koordinat Bilinmeyenlerinin Ortalama Hataları

Bir ağ dengelemesi sonucunda hesaplanan koordinat bilinmeyenlerinin ortalama hataları;

a) Kuramsal varyans σ_0^2 nin önceden tahmin edilebildiği durumlarda ağın ölçme planı ve yaklaşık koordinatlarından yararlanarak hesaplanabilen ters ağırlık matrisi Q_{xx} yardımıyla

$\sigma_{x_i} = \sigma_0 \sqrt{q_{x_i x_i}}$ Koordinat Bilinmeyenlerinin Ortalama Hataları

bağıntısı ile tahmin edilebilir. Kuramsal standart sapma σ_0 ın önceden kestirebildiği durumlarda koordinat bilinmeyenlerinin güven aralıkları

α : Yanılma Olasılığı	($\alpha = 0{,}05$ ya da $\alpha = 0{,}01$)
S : İstatistik Güven	($S = 1 - \alpha = 0{,}95$ ya da $0{,}99$)
$P(a_i < x_i \leqslant b_i) = 1 - \alpha = S$	Güven Aralığı
$a_i = x_i - z_{1-\alpha/2}\,\sigma_{x_i}$	Güven Aralığının Alt Sınırı
$b_i = x_i + z_{1-\alpha/2}\,\sigma_{x_i}$	Güven Aralığının Üst Sınırı
$z_{1-\alpha/2}$	Standartlaştırılmış Normal Dağılımın Rastgele Değişkeni bağıntılarından hesaplanır.

b) Karesel ortalama hata m_0^2 nin dengeleme işlemleri sonucunda elde edildiği durumlarda

$m_{x_i} = m_0 \sqrt{q_{x_i x_i}}$	Koordinat bilinmeyenlerinin ortalama hataları
$P(a_i < x_i \leqslant b_i) = 1 - \alpha = S$	Güven aralığı
$a_i = x_i - t_{f,1-\alpha/2}\,m_{x_i}$	Güven aralığının alt sınırı
$b_i = x_i + t_{f,1-\alpha/2}\,m_{x_i}$	Güven aralığının üst sınırı

$f = n - u$ — Serbestlik derecesi (fazla ölçü sayısı)

$t_{f,1-\alpha/2}$ — t-Dağılımının (Student-Dağılımı) tablo değeri

Hata Elipsi

Ağ noktalarından herhangi biri olan P_i noktasına ilişkin koordinat bilinmeyenleri vektörü

$$x_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$$

biçiminde gösterilirse bu alt vektörün ters ağırlık matrisi

$$Q_{ii} = \begin{bmatrix} q_{x_ix_i} & q_{x_iy_i} \\ q_{y_ix_i} & q_{y_iy_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{xx} & q_{xy} \\ q_{yx} & q_{xy} \end{bmatrix}$$

eşitliği ile tanımlanabilir. Bu eşitlikten yararlanarak HELMERT Hata Elipsinin elemanları

$$A_H = m_o\sqrt{\frac{1}{2}(q_{xx} + q_{yy} + w)}$$ Büyük Yarıeksen

$$B_H = m_o\sqrt{\frac{1}{2}(q_{xx} + q_{yy} - w)}$$ Küçük Yarıeksen

$$\theta = \frac{1}{2}\arctan\frac{2q_{xy}}{q_{xx} + q_{yy}}$$ Büyük Yarıeksenin Doğrultusu

$$w = (q_{xx} + q_{yy})^2 + 4q_{xy}^2$$ bağıntılarından hesaplanabilir.

Ters ağırlık matrisi Q_{ii}nin özdeğerleri λ_A, λ_B ve normlandırılmış özvektörleri s_A, s_B ile gösterilirse $\lambda_A > \lambda_B$ (özdeğerlerden büyük olanı λ_A ve buna karşılık gelen normlandırılmış özvektör s_A ile gösterilerek)

$$Q_{ii} = \begin{bmatrix} s_A & s_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_A & 0 \\ 0 \\ 0 & \lambda_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_A^T \\ s_B^T \end{bmatrix}$$

bağıntısını sağlayan spektral ayırma sonuçlarından yararlanarak s_A vektörünün x yönündeki bileşeni s_{Ax} ve sözkonusu vektörün y yönündeki bileşeni s_{Ay} ile gösterilirse

$$A_H = m_o \sqrt{\lambda_A}$$

$$B_H = m_o \sqrt{\lambda_B}$$

$$\theta = \arctan \frac{s_{Ay}}{s_{Ax}}$$

eşitliklerinden hesaplanabilir.

Kuramsal Güven Elipsi

P_i noktasının gerçek koordinatları $\tilde{x}$ ile gösterilirse bunların gerçek düzeltmeleri ve gerçek düzeltmelerin ters ağırlık matrisi

$$\epsilon = x - x_i$$
$$Q_{\epsilon\epsilon} = Q_{ii}$$

eşitlikleri ile bellidir. Gerçek düzeltmelerden yararlanarak

$$s_o^2 = \frac{\epsilon^T Q_{ii}^{-1} \epsilon}{2} \qquad \text{Deneysel Varyans}$$

ve kuramsal varyans σ_o^2 ile deneysel varyans s_o^2 arasındaki

$$\chi_f^2 = f \frac{s_o^2}{\sigma_o^2} \leqslant \chi_{f,1-\alpha}^2$$

bağıntısında $f = 2$ ve $s_o^2 = \dfrac{\epsilon^T Q_{ii}^{-1} \epsilon}{2}$ değerleri yerine konursa

$$(x - x)^T Q_{ii}^{-1} (x - x) \leqslant \sigma_o^2 \chi_{2\ 1-\alpha}^2$$

eşitsizliği elde edilir. Söz konusu eşitsizliğin olasılık bağıntısı istatistik güvene eşit yazılırsa

$$P \{ (x - x)^T Q_{ii}^{-1} (x - x) \} \leqslant \sigma_o^2 \ \chi_{2,1-\alpha}^2 = 1 - \alpha$$

olur. Bu bağıntının sınırladığı alanın çevresi bir elipstir ve Kuramsal Güven Elipsi olarak adlandırılır. Kuramsal güven elipsinin yarıeksenleri

$$A_K = \sigma_o \sqrt{\lambda_A \chi^2_{2,1-\alpha}}$$ Kuramsal Güven Elipsinin Büyük Yarıekseni

$$B_K = \sigma_o \sqrt{\lambda_B \chi^2_{2,1-\alpha}}$$ Küçük Yarıekseni

$$\theta_K = \theta_H = \text{arct} \frac{s_{Ay}}{s_{Ax}}$$ Büyük Yarıeksenin Doğrultusu

eşitliklerinden hesaplanır. Kuramsal Güven Elipsi ile Hata Elipsinin yarıeksenleri oranlanırsa

$$\frac{A_K}{A_H} = \sqrt{\chi^2_{2,1-\alpha}}$$

bağıntısı elde edilir.

Güven Elipsi

P_i noktasındaki koordinat bilinmeyenlerinin gerçek düzeltmelerinden hesaplanan varyans

$$s_o^2 = \frac{\epsilon_i^T Q_{ii}^{-1} \epsilon_i}{2} = \frac{(x - x)^T Q_{ii}^{-1} (x - x)}{2}$$

biçimindedir. Ağ dengelemesi sonucunda hesaplanan birim ölçünün karesel ortalama hatası

$$m_o^2 = \frac{v^T P v}{n-u} \qquad n-u = f$$ Fazla Ölçü Sayısı

büyüklükleri aynı bir kuramsal varyans σ_o^2 nin deneysel değerleri olduklarından bunların oranları F-Dağılımındadır.

$$\frac{s_o^2}{m_o^2} \doteq F_{2,f} \leqslant F_{2,f,1-\alpha}$$

Bu son eşitsizliğin olasılık bağıntısı istatistik güvene eşit yazılırsa

$$P\{(x - x)^T Q_{ii}^{-1} (x - x)\} \leqslant 2\, m_0^2\, F_{2,f,1-\alpha} = 1 - \alpha$$

bağıntısının sınırladığı alanın çevresi bir elipstir. Söz konusu elips Güven Elipsi olarak adlandırılır. Güven elipsinin yarıeksenleri

$$A_G = m_o \sqrt{2\, \lambda_A F_{2,1,1-\alpha}}$$ Güven Elipsinin Büyük Yarıekseni

$$B_G = m_o\sqrt{2\lambda_B F_{2,1,1-\alpha}}$$ Küçük Yarıekseni

$$\theta_G = \theta_H = \operatorname{arct}\frac{s_{Ay}}{s_{Ax}}$$ Büyük Yarıeksenin Doğrultusu

bağıntıları ile hesaplanır. Güven Elipsi ile Hata Elipsinin Yarıeksenleri arasında

$$\frac{A_G}{A_H} = \sqrt{2F_{2,f,1-\alpha}}$$

bağıntısı vardır.

Konum Hatası

$$m_{P_i} = \sqrt{m_{x_i}^2 + m_{y_i}^2} = m_o\sqrt{q_{x_ix_i} + q_{y_iy_i}} = m_o\sqrt{\lambda_A + \lambda_B}$$

Werkmeister Nokta Hatası

$$w_{P_i} = m_o^2\sqrt{\lambda_A\lambda_B} = m_o^2\sqrt{q_{x_ix_i}\cdot q_{y_iy_i} - q_{x_iy_i}^2}$$

Bağıl (Relatif) Hata Elipsleri

P_i ve P_k noktalarının koordinat farkları d vektöründe toplanır.

$$d = \begin{bmatrix} x_k - x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k - x_i \\ y_k - y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ x_k \\ y_k \end{bmatrix}$$

$$d = F\,x$$

ve koordinat farkları vektörünün ters ağırlık matrisi Q_{dd} hesaplanırsa

$$Q_{dd} = F\,Q_{xx}\,F^T$$

$$Q_{xx} = \begin{bmatrix} Q_{ii} & Q_{ik} \\ Q_{ik}^T & Q_{kk} \end{bmatrix}$$

$$Q_{ii} = \begin{bmatrix} q_{x_ix_i} & q_{x_iy_i} \\ q_{y_ix_i} & q_{y_iy_i} \end{bmatrix} \qquad Q_{kk} = \begin{bmatrix} q_{x_kx_k} & q_{x_ky_k} \\ q_{y_kx_k} & q_{y_ky_k} \end{bmatrix}$$

$$Q_{ik} = \begin{bmatrix} q_{x_ix_k} & q_{x_iy_k} \\ q_{y_ix_k} & q_{y_iy_k} \end{bmatrix}$$

kısa gösterimleri ile

$$Q_{dd} = Q_{ii} + Q_{kk} - Q_{ik} - Q_{ik}^T = \begin{bmatrix} q_{dxdx} & q_{dxdy} \\ q_{dydx} & q_{dydy} \end{bmatrix}$$

elde edilir. HELMERT Hata Elipsinin tanımına benzer biçimde Bağıl Hata Elipsinin yarıeksenleri

$$A_{BH} = m_o\sqrt{\frac{1}{2}(q_{dxdx} + q_{dydy} + w_B} \qquad \text{Büyük Yarıeksen}$$

$$B_{BH} = m_o\sqrt{\frac{1}{2}(q_{dxdx} + q_{dydy} - w_B} \qquad \text{Küçük Yarıeksen}$$

$$\theta_{HB} = \frac{1}{2}\arctan\frac{2q_{dxdy}}{q_{dxdx} - q_{dydy}} \qquad \text{Büyük Yarıeksenin Doğrultusu}$$

$$w_B = (q_{dxdx} - q_{dydy})^2 - 4\,q_{dxdy}^2$$

eşitlikleri ile hesaplanır.

Bağıl Güven Elipsleri

Koordinat farkları vektörünün gerçek değerleri d ile gösterilirse bunların gerçek düzeltmeleri

$$\epsilon_d = d - d$$

ve varyansın gerçek düzeltmelerden hesaplanan deneysel değeri

$$s_o^2 = \frac{\epsilon_d^T Q_{dd}^{-1} \epsilon_d}{2} = \frac{(d-d)^T Q_{dd}^{-1} (d-d)}{2}$$

ağ dengelemesi sonucunda hesaplanan birim ölçünün karesel ortalama hatası

$$m_o^2 = \frac{v^T Pv}{n-u}$$

bağıntılarından elde edilir. Kuramsal varyans σ_o^2 nin bu iki deneysel değeri arasında kurulacak olasılık bağıntısı

$$P \{(d-d)^T Q_{dd}^{-1} (d-d) \leqslant 2m_o^2 F_{2,f,1-\alpha}\} = 1-\alpha$$

biçimini alır. 2 x 2 boyutlu Q_{dd} matrisinin özdeğerlerinden büyük olanı λ_A, küçük olanı λ_B ile gösterilirse

$$A_{BG} = m_o \sqrt{2_A F_{2,f,1-\alpha}} \qquad \text{Büyük Yarıeksen}$$

$$B_{BG} = m_o \sqrt{2_B F_{2,f,1-\alpha}} \qquad \text{Küçük Yarıeksen}$$

$$\theta_{BG} = \theta_{BH} = \arctan \frac{s_{Ady}}{s_{Adx}} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2q_{dxdy}}{q_{dxdx} - q_{dydy}}$$

eşitlikleri elde edilir.

Güven Elipsleri ile Hata Elipslerinin Karşılaştırılması

Güven Elipsleri ile Hata Elipslerinin Yarıeksenlerini veren bağıntılar oranlanırsa

$$\frac{A_G}{A_H} = \frac{B_G}{B_H} = \sqrt{2F_{2,f,1-\alpha}}$$

$$A_G = A_H \sqrt{2F_{2,f,1-\alpha}}$$

$$\theta_G = \theta_H$$

bağıntıları elde edilir. İstatistik Güven S = $1-\alpha$ = % 95 seçilirse fazla ölçü sayısının $f = n - u = \infty$ olduğu durumlarda

$$\sqrt{2F_{2,f,0.95}} = 2{,}45$$

$$A_G = 2{,}45\ A_H$$

$$B_G = 2{,}45\ B_H$$

fazla ölçü sayısı $f = n - u = 5$ iken

$$A_G = 3{,}40\ A_H$$

$$B_G = 3{,}40\ B_H$$

bağıntıları elde edilir. Bu eşitliklerden, Güven Elipslerinin Yarıeksenlerinin Hata Elipslerinin Yarıeksenlerinden yaklaşık olarak 3 kat daha büyük oldukları görülmektedir.

Güven Elipslerinin olasılık bağıntısı

$$P\ \{ (x - x)^T\ Q_{ii}^{-1}\ (x - x) \leqslant 2m_o^2\ F_{2,f,1-\alpha} \} = 1 - \alpha$$

ve Hata Elipslerinin olasılık bağıntısı

$$P\ \{ (x - x)^T\ Q_{ii}^{-1}\ (x - x) \leqslant m_o^2 \} = 1 - \alpha$$

eşitlikleri karşılaştırılırsa, Hata Elipslerinde F-Dağılımı değerinin

$$2\ F_{2,f,1-\alpha} = 1 \qquad\qquad F_{2,f,1-\alpha} = 0{,}5$$

gibi sabit bir sayı olduğu ortaya çıkar. Serbestlik derecesi $f = n - u$'ya bağlı olarak $S = 1 - \alpha$ değerlerini veren aşağıdaki gibi bir çizelge düzenlenebilir.

Serbestlik Derecesi f	Hata Elipsinin İstatistik Güveni
1	0,293
2	0,333
5	0,366
10	0,379
∞	0,394

Bu çizelgeden, bir noktanın geometrik yeri olarak düşünülen hata elipsi içine düşme olasılığının % 30 - % 39 arasında değiştiği, bu olasılığın yaklaşık % 35 alınabileceği görülmektedir. Buna karşın bir noktanın hata elipsi dışına düşme olasılığı, başka bir deyişle hata elipsinin noktanın geometrik yeri olduğu varsayımının yanılma olasılığı yaklaşık olarak % 65'tir.

2.2- Ağın Tümü İçin Geçerli Duyarlık Ölçütleri

Ağın tamamının kalitesi için tanımlanan duyarlık ölçütleri, koordinat bilinmeyenlerinin varyans-kovaryans matrisinin tümünden yararlanarak hesaplanırlar. Bu ölçütler kuramsal standart sapma σ_o ve ağın ölçme planı taslağından yararlanarak bulunan

$$\Sigma_{xx} = \sigma_o^2 \, Q_{xx} \qquad \text{Kuramsal Varyans-Kovaryans Matrisi}$$

yardımıyla hesaplandıklarında, ağda ulaşılabilecek duyarlığın daha planlama aşamasında belirlenmesi için kullanılırlar.

Dengeleme sonucunda hesaplanan birim ölçünün ortalama hatası m_o dan yararlanarak bulunan

$$K_{xx} = m_o^2 \, Q_{xx} \qquad \text{Deneysel Varyans-Kovaryans Matrisinden}$$

hesaplandıklarında, ağda gerçekleştirilen duyarlıkların saptanmasına yararlar.

Güven Hiperelipsoidi

Ağ noktalarının tümünün koordinat bilinmeyenleri ile yazılan

$$P \{ (x-x)^T Q_{xx}^{-1} (x-x) \leqslant \sigma_o^2 \chi^2_{u,f,1-\alpha} \} = 1-\alpha$$

ya da

$$P \{ (x-x) Q_{xx}^{-1} (x-x) \leqslant 2 \, m_o^2 \, F_{u,f,1-\alpha} \} = 1-\alpha$$

olasılık bağıntılarının ilkinden hesaplanacak Kuramsal Güven Hiperelipsoidinin yarıeksenleri

$$A_{iKG} = \sigma_o \sqrt{\lambda_i \, \chi^2_{2p,1-\alpha}}$$

ya da ikincisinden hesaplanacak Deneysel Güven Hiperelipsoidinin yarıeksenleri

$$A_{iDG} = m_o \sqrt{2 \, \lambda_i \, F_{2p,f,1-\alpha}}$$

p : Ağda koordinatı bilinmeyen nokta sayısı
n : Ağdaki ölçü sayısı
u : Ağdaki bilinmeyen sayısı
f : n − u Ağın serbestlik derecesi
λ_i : Ters ağırlık matrisi O_{xx} in özdeğerleri eşitliklerinden bulunur.

Hacim Kriteri

Kuramsal ve Deneysel Güven Hiperelipsoidlerinin hacimleri ile ilişkili

$$\det(\Sigma_{xx}) = \sigma_o^2\, \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_{2p} = \sigma_o^{2p} \prod_{i=1}^{2p} \lambda_i$$

$$\det(K_{xx}) = m_o^2\, \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_{2p} = m_o^{2p} \prod_{i=1}^{2p} \lambda_i$$

determinant değerlerinin herbiri ağın tümü için geçerli duyarlık ölçütü olarak kullanılabilir.

Varyans Kriteri

Kuramsal ve Deneysel Varyans-Kovaryans Matrislerinin ana köşegen elemanlarının toplamı ile oluşturulan

$$\mathrm{iz}\,(\Sigma_{xx}) = \sigma_o^2 \,.\, \mathrm{iz}\,(Q_{xx}) = \sigma_o^2\,(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_{2p} = \sigma_o^2 \sum_{i=1}^{2p} \lambda_i$$

$$\mathrm{iz}\,(K_{xx}) = m_o^2 \,.\, \mathrm{iz}\,(Q_{xx}) = m_o^2\,(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_{2p} = m_o^2 \sum_{i=1}^{2p} \lambda_i$$

değerleri ağın tamamı için tanımlanan duyarlık ölçütleridir.

Ortalama Koordinat Hatası

$$\sigma_x, \sigma_y = \sqrt{\frac{\mathrm{iz}\,(\Sigma_{zz})}{2p}} = \sigma_o \sqrt{\frac{\mathrm{iz}\,(Q_{xx})}{2p}} \qquad \text{Ulaşılabilir Değer}$$

$$m_x, m_y = \sqrt{\frac{\mathrm{iz}\,(K_{xx})}{2p}} = m_o \sqrt{\frac{\mathrm{iz}\,(Q_{xx})}{2p}} \qquad \text{Gerçekleştirilen Değer}$$

bağıntıları ile tanımlanan ortalama koordinat hatası, ağın tümü için tanımlanan bir duyarlık ölçütüdür.

Özdeğerler Kriteri

Kurulması planlanmakta olan bir jeodezik ağda bilinmeyenlerin belirli bir fonksiyonunun ortalama hatasının minimum olması, amaç fonksiyonu olarak benimsenebilir. Söz gelimi ülke nirengi ağında komşu noktalara olan uzaklıkların ortalama hatalarının minimum olması ya da ağın duyarlık yönünden homojen ve izotrop olması öngörülebilir. Bilinmeyenlerin herhangi bir fonksiyonu, en genel biçimiyle

$$f = F(x)$$

matris fonksiyonu olarak yazılabilir. Ortalama hatasının minimum olması öngörülen bu fonksiyonun diferansiyeli

$$df = \frac{F(x)}{\partial x}\, dx \qquad a^T = \frac{\partial F(x)}{\partial x} \quad \text{kısa gösterimi ile}$$

$$df = a^T\, dx$$

biçimindedir. Genel hata yayılma kuralı uygulanarak

$$\sigma_f^2 = a^T \Sigma_{xx}\, a = \sigma_o^2\, a^T Q_{xx}\, a \qquad \text{Kuramsal Varyans}$$

ya da

$$m_f^2 = a^T K_{xx}\, a = m_o^2\, a^T Q_{xx}\, a \qquad \text{Karesel Ortalama Hata}$$

eşitlikleri elde edilir. Ağın planlanması aşamasında birim ölçünün karesel ortalama hatası m_o^2 henüz belirlenmemiş olduğundan kuramsal varyans σ_o^2 nin olası değerleri

$$\lambda_{min} \leqslant \frac{a^T\, {}_{xx}a}{a^T a} \leqslant \lambda_{max} \qquad \text{Rayleigh - İlişkisi}$$

istatistik eşitsizliği ile sınırlanabilir. Burada λ_{min}, λ_{max} Kuramsal Varyans-Kovaryans Matrisi Σ_{xx} in en küçük ve en büyük özdeğerleridir. Söz konusu eşitsizliğin tüm terimleri $a^T a$ ile çarpılırsa

$$a^T a\, \lambda_{min} \leqslant \sigma_f^2 \leqslant a^T a\, \lambda_{max}$$

elde edilir. Buradan

$$\lambda_{max} \cong \lambda_{min}$$

koşulunu sağlayan jeodezik ağların homojen ve izotrop oldukları sonucuna varılır. Homojen bir ağda güven elipslerinin tümü, benzer görünümlü ve aynı büyüklüktedir. İzotrop ağlarda güven elipslerinin yarıeksenleri birbirine eşit ve elipsler daire görünümündedir. Kısaca söylenirse homojen ve izotrop bir ağda güven hiperelipsoidlerinin yarı eksenlerinin tümü birbirine eşittir.

Güven Hiperelipsoidlerinin yarıeksenlerinin

$$A_i = \sqrt{\lambda_i\, \chi^2_{2p,1-\alpha}}$$

eşitliklerinden elde edildikleri gözönüne alınırsa Homojen ve İzotrop bir ağın varyans-kovaryans matrisinin özdeğerleri arasında

$$\lambda_1 \cong \lambda_2 \cong \cdots \cong \lambda_{2p}$$

ilişkisi vardır. Bunun gibi

$$\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} = 1$$

$$\lambda_{max} - \lambda_{min} = \text{min.}$$

amaç fonksiyonlarının herbiri homojen ve izotrop bir ağı gösterirler.

Ana Varyans Bileşenleri

Bir nirengi ağında ulaşılabileceği varsayılan ölçü duyarlığı σ_o ile gösterilirse, tasarlanan ölçme planından yararlanarak koordinat bilinmeyenlerinin

$$\Sigma_{xx} = \sigma_o^2 Q_{xx} \qquad \text{Kuramsal Varyans-Kovaryans Matrisi}$$

ve bunun

$$\Sigma_{xx} = [s_1 \; s_2 \ldots s_{2p}] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{2p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1^T \\ s_2^T \\ \vdots \\ s_{2p}^T \end{bmatrix}$$

p : Ağda koordinatı dengelenen nokta sayısı

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_{2p}$$

bağıntısını sağlayan özdeğerleri λ_i ve bunlara ilişkin normlandırılmış özvektörler s_i ile hesaplanan

$$b_i = s_i \sqrt{\lambda_i} \qquad \text{Ana bileşen vektörleri}$$

ağın duyarlık yönünden zayıf noktalarını, bu zayıflığın doğrultusunu ve büyüklüğünü verirler. Birinci Ana Bileşen Vektörü b_1 ağda duyarlık yönünden en zayıf noktayı ve bu zayıflığın doğrultusunu gösterir. Başka bir deyişle ilk ana bileşen vektörü b_1, kuramsa güven hiperelipsoidinin en büyük yarıekseninin bulunduğu noktayı ve bu zayıflığın bi yüklüğünü gösterir.

$$A_1 = \sqrt{\lambda_1 \chi^2_{2p,1-\alpha}}$$ Kuramsal Güven Hiperelipsoidinin En Büyük Yarıekseni

Varyans kriterinin bileşenlerinden en büyüğü olan λ_1 büyüklüğü, Ana Varyans Bileşeni ya da En Önemli Özdeğer olarak adlandırılır. Ağın geometrik şeklinin optimum olarak belirlenemediği durumlarda bu ana varyans bileşeni, toplam varyans kriteri

$$\text{iz}\,(\Sigma_{ZZ}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{2p} = \Sigma\lambda_i$$

büyüklüğünün % 40 - % 60'ına varan değerler alabilmektedir.

Ana varyans bileşeninin doğrultusu, ağdaki ölçülerin birden fazla ölçme periyodunda tekrarlanması durumunda rastgele ölçü hatalarının etkisi ile oluşabilecek konum değişikliklerini gösterir.

Kriterium Matrisleri

Bir ağ dengelemesi sonucunda elde edilmesi istenen varyans-kovaryans matrisi C_{xx} olarak tanımlanır ve bu matris gerçekleştirilen varyans-kovaryans matrisi K_{xx} ile karşılaştırılarak ağdan beklenen duyarlıklara ulaşılıp ulaşılmadığı denetlenebilir. Kriterium matrisi olarak adlandırılan varyans-kovaryans matrisi C_{xx}, jeodezik ağların kullanma amaçları için gerekli görülen duyarlık isteklerini kapsayan yapma bir matristir. Sözgelimi ülke nirengi ağına ilişkin duyarlık istekleri, her tarafta ve her yönde aynı ve yüksek duyarlıklı homojen ve izotrop bir ağ olarak özetlenebilir. Homojen ve izotrop bir ağ isteği aşağıdaki özellikleri kapsar (Alberda 1980).

- Ağ noktalarının tümündeki güven elipsleri homojen ve izotrop görünümde, d yarıçaplı daireler biçiminde olmalıdır.
- P_i ve P_j noktaları arasında hesaplanacak bağıl (relatif) güven elipsleri daire görünümünde olmalı ve yarıçapları $r = 2c.s_{km}$ büyüklüğünde olmalıdır.
- x koordinatları ile y'ler arasındaki cebirsel korelasyonlar, gözardı edilebilecek büyüklükte kalmalıdır.

Söz konusu duyarlık isteklerini kapsayan yapma varyans-kovaryans matrisi, 2 yeni noktadan oluşan bir ağda

$$D_{xx} = \begin{bmatrix} d^2 & 0 & (d^2 - c^2 s_{ij}) & 0 \\ 0 & d^2 & 0 & (d^2 - c^2 s_{ij}) \\ (d^2 - c^2 s_{ij}) & 0 & d^2 & 0 \\ 0 & (d^2 - c^2 s_{ij}) & 0 & d^2 \end{bmatrix}$$

görünümündedir. Bu yapma varyans-kovaryans matrisini, gerçekleştirilen varyans-kovaryans matrisi K_{xx} ile karşılaştırabilmek için datum uyumunun sağlanması gerekir.

$$S = E - G\,(G^T G)^{-1}\, G^T$$

E : Birim Matris

G : Koordinat eksenleri yönünde iki öteleme (x_o, y_o), bir dönme (t_o) ve varsa bir ölçek parametresi (k_o) ile yapılacak benzerlik dönüşümünün katsayılar matrisi

$$C_{xx} = S\, D_{xx} S^T \qquad \text{Kriterium Matrisi}$$

Grafarend (1979)'e göre Stokastik Süreç kavramına uygun olarak oluşturulacak Taylor-Karman yapısındaki varyans-kovaryans matrislerinden hesaplanan güven elipsleri de her yerde aynı yarıçaplı, homojen ve izotrop görünümlü olurlar. Bu yöntemde P_i ve P_j noktalarının koordinatları arasındaki korelasyonlar, Korelasyon Fonksiyonları ile tanımlanmaktadır.

Gerçekleştirilen varyans-kovaryans matrisi K_{xx}in duyarlık isteklerini içeren yapma varyans-kovaryans matrisi C_{xx}e eşdeğer olup olmadığı

$$B = C_{xx}^{-1}\, K_{xx}$$

matrisinin özdeğerlerinden en büyüğü olan μ_{max} ın

$$\mu_{max} \leqslant 1$$

eşitsizliği irdelenerek denetlenir.

3- GÜVEN ÖLÇÜTLERİ

Jeodezik ağların kalitesini gösteren duyarlık ölçütleri, dengeleme modelinin geçerli olduğu durumlarda gerçeğe uygun bilgi verirler. Başka bir deyişle, dengelemenin fonksiyonel modelinin ölçülerle bilinmeyenler arasındaki geometrik ve fiziksel ilişkilere uygun olduğu, stokastik modelin ölçülerin duyarlıklarını ve aralarındaki korelasyonları yeterince yansıttığı durumlarda hesaplanan büyüklükler, gerçeğe uygun olurlar. Buna karşın ölçülerle bilinmeyenler arasındaki geometrik ve fiziksel ilişkileri gösteren fonksiyonel modelin gerçeğe uygun olmaması ya da gözlemlerden birkaçında oluşan kaba yanılmalar veya ölçü ağırlıklarının hatalı seçilmesi gibi durumlarda model hataları ortaya çıkar. Bir ağ dengelemesi için kurulan matematik modelin gerçeğe uygun olup olmadığı Güven Ölçütleri ile denetlenir.

Model Hipotezinin Testi

Dengeleme hesabının matematik modelinin ölçülerle bilinmeyenler arasındaki geometrik ve fiziksel ilişkilere uygun olup olmadığı, ölçülerin duyarlıklarını ve aralarındaki korelasyonları yeterince yansıtıp yansıtmadığı Model Hipotezinin Testi yoluyla denetlenir. Aynı koşullarda yapılan benzer türden ölçülerin değerlendirilmesi sonucunda, dengelemeden önce elde edilen ve gözlemlerin ağırlıklarının belirlenmesinde yararlanılan birim ölçünün ortalama hatasının öncül (a priori) değeri m ile gösterilirse, dengeleme hesabı sonucunda bulunan

$$m_o = \pm \frac{v^T Pv}{n - u}$$

büyüklüğü, birim ölçünün ortalama hatasının soncul (a posteriori) değeri olur. Gerek öncül değer m_o ve gerekse soncul değer m_o, aynı bir kuramsal standart sapma σ_o ın uygulamada elde edilen değerleridir. Geçerli bir matematik model ile yürütülen dengeleme hesabından elde edilen bu değerler arasında

$$E\,\{m_o^2\} = E\,\{m_o^2\} = \sigma_o^2 \qquad \text{Umut Değer}$$

bağıntısı geçerli olur ve m_o^2 / m_o^2 oranı merkezil F-Dağılımına uyar.

$$\frac{m_o^2}{m_o^2} = F_{f,\,f}$$

$f = n - u$ — Dengeleme hesabının serbestlik derecesi

$\overline{f}$ — Öncül değer $\overline{m}_o$ nin serbestlik derecesi

$T = \dfrac{m_o^2}{m_o^2}$ — Test Büyüklüğü

hesaplanır. Bu büyüklük, seçilen α (= % 5) kadar bir yanılma olasılığı ve f, $\overline{f}$ serbestlik dereceleri ile F-Dağılımı tablolarından alınan $F_{f,f,1-\alpha/2}$ sınır değeri ile karşılaştırılır.

$T < F_{f,f,1-\alpha/2}$ ise Dengeleme modeli geçerlidir.

Kurulan fonksiyonel model, gözlemlerle bilinmeyenler arasındaki geometrik ve fiziksel ilişkilere uygundur. Stokastik model, gözlemlerin duyarlıklarını ve aralarındaki korelasyonları yeterince yansıtmaktadır. Geçerli bir model hipotezi dengeleme işlemlerinin tümü için bir güven ölçütüdür.

$T > F_{f,f,1-\alpha/2}$ ise Dengeleme modeli geçersizdir.

Bu geçersizliğin nedeni, ölçülerden birinde ya da birkaçında yapılan kaba yanılmalar olabileceği gibi, ölçülerin yanlış indirgenmeleri, aletlerin ayar hataları da geçersizliği oluşturabilirler.

Model Hataları ve Uyuşumsuz Ölçüler Testi

Model hatalarının en sık rastlananı ölçülerde yapılan kaba yanılmalardır. Okuma yazma hataları, aletlerin hatalı merkezlendirilmesi ya da yanlış hedefe gözlem yapma gibi nedenlerle ortaya çıkan kaba hataların büyük bir bölümü, düzeltme denklemlerinin kurulması sırasında sabit terimlerde kendini gösterirler ve gözlemler yenilenerek düzeltilirler.

Buna karşın rastgele ölçü hatalarına çok yakın büyüklükte olan kaba hatalar, kolaylıkla farkedilemezler ve dengeleme hesabı sonucunda bulunan büyüklükleri olumsuz yönde etkilerler. Bunlar ancak dengeleme hesabı tamamlandıktan sonra uygulanan Uyuşumsuz Ölçüler Testi yardımı ile belirlenebilirler.

Herhangi bir L_i ölçüsünde yapılan kaba hata Δ_i ile gösterilirse bu kaba hata düzeltme denklemlerinin sabit terimlerini de doğrusal olarak etkiler. Ötelenmiş gözlemler olarak adlandırılabilen bu sabit terimler l_i ile gösterilirse dengelemeye giren kaba hatalı büyüklükler

$l'_i = l_i + \Delta_i$ Kaba Hatalı Gözlemler

biçiminde olurlar. Söz konusu kaba hata Δ_i nin dengeleme sonuçlarına etkisi, aşağıdaki yolla denetlenir.

$l + v = a x \quad P$	Matematik Model
$x = (A^T P A)^{-1} A^T P l$	Dengeleme Bilinmeyenleri
$v = Ax - l$	Düzeltmeler
$m_o = \pm\sqrt{\dfrac{v^T P v}{n-u}}$	Birim Ölçünün Ortalama Hatası
$Q_{ll} = P^{-1}$	Ölçülerin Ters Ağırlık Matrisi
$Q = (A^T P A)^{-1}$	Bilinmeyenlerin Ters Ağırlık Matrisi
$Q_{vv} = Q_{ll} - A Q A^T$	Düzeltmelerin Ters Ağırlık Matrisi

$v = -Q_{vv} P\, l$ — Düzeltmeler

$l = l' - e_j \Delta_j$ — Kaba Hatalardan Arıtılmış Gözlemler

$\Delta_j : j$ — Numaralı Ölçüdeki Kaba Hata

$e_j : j.$ — Birim Vektörü

$$
\begin{array}{cccccccccc}
e_j^T = [& 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0] \\
 & 1 & 2 & . & . & j & . & . & n
\end{array}
$$

$$l + v = l' - e_j \Delta_j + v = A\, x$$

$$l + v = \begin{bmatrix} A & e_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \Delta_j \end{bmatrix}$$

Genişletilmiş Fonksiyonel Model

$$\begin{bmatrix} A^T P A & A^T P e_j \\ e_j^T P A & e_j^T P e_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \Delta_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A^T P l \\ e_j^T P l \end{bmatrix} = 0$$

Normal Denklemler

$$\begin{bmatrix} x \\ \Delta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{x\Delta} \\ Q_{\Delta x} & q_{\Delta\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T P l \\ e_j^T P l \end{bmatrix}$$

Normal Denklemlerin Çözümü

$$q_{\Delta\Delta} = \frac{1}{e_j^T P Q_{vv} P e_j}$$

Kaba Hatanın Ters Ağırlığı

$$\Delta_j = -\frac{e_j^T P v}{e_j^T P Q_{vv} P e_j}$$

j. Ölçüdeki Kaba Hatanın Büyüklüğü

$$x = x - Q\, A^T P\, e_j \Delta_j$$

Genişletilmiş Modelin Bilinmeyenleri

$$v = v + Q_{vv} P\, e_j \Delta_j$$

Genişletilmiş Modelin Düzeltmeleri

$$s_o = \pm \sqrt{\frac{v^T P v}{n-u-1}}$$

Birim Ölçünün Ortalama Hatasının Genişletilmiş Modelden Hesaplanan Değeri

$f = n - u$: Dengelemenin Serbestlik Derecesi

$$s_o = \pm \sqrt{\frac{1}{f-1} \left(fm_o^2 - \frac{\Delta_j^2}{q_{\Delta\Delta}}\right)}$$

Hesaplanan kaba hatanın anlamlı olup olmadığını irdeleyebilmek için

$H_o : E(\Delta_j) = 0$ Sıfır Hipotezi

kurulur ve bu hipotez

$H_s : E(\Delta_j) \neq 0$ Seçenek Hipotezi

ile test edilir.

$$T = \frac{\Delta_j}{m\Delta} = \frac{\Delta_j}{s_o \sqrt{q_{\Delta\Delta}}}$$

ya da

$$T = \frac{e_j^T P v}{s_o \sqrt{e_j^T P Q_{vv} P e_j}}$$ Test Büyüklüğü

α : Testin Yanılma Olasılığı

$S = 1 - \alpha$: İstatistik Güven

ile t-Dağılımı tablolarından alınan

$t_{f,1-\alpha/2}$ Test Büyüklüğünün Sınır Değeri

$\frac{\alpha}{2} = 1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha}{2}}$ Student Dağılımının Yanılma Olasılığı

ile karşılaştırılır.

$T \leqslant t_{f-1,\,1-\alpha/2}$ ise H_o hipotezi geçersiz sayılamaz. İrdelenen ölçüde kaba yanılma olduğu söylenemez

$T > t_{f-1,\,1-\alpha/2}$ ise H_o hipotezi geçersiz, buna karşın H_s hipotezi geçerlidir. İrdelenen ölçüde sayısal değeri Δ_j kadar olan, anlamlı bir kaba hata vardır.

Bir ağda yapılan ölçülerin tümü söz konusu uyuşumsuz ölçüler testi yöntemi ile irdelenerek kaba hatalı ölçüler belirlenir ve yenileme ölçüleri yapılarak düzeltilir.

Redundanz Payı

Geçerli bir model ile yapılan dengeleme sonucunda

$l + v = A\,x \quad P$ Matematik Model

$v = -\,Q_{vv} P\, l$ Düzeltmeler

eşitliğinden hesaplanabilir. Geçersiz bir dengeleme modeli yerine kurulan

$$l + v = l' - \Delta + v = A\,x$$

$l + v = [A \quad e] \begin{bmatrix} x \\ \Delta \end{bmatrix}$ Genişletilmiş Fonksiyonel Model

$l' = l + \Delta$ Hatalı Gözlemler

$v = v + \Delta_v$ Model Hatalarının Düzeltmelere Etkisi

$\Delta_v = -\,Q_{vv} P\, \Delta$

biçimini alırlar. Herhangi bir gözlemin kaba hatasını (Δ_i) bu gözleme ilişkin düzeltmeye (v_i) etkisi

$$\Delta_{v_i} = -\,(Q_{vv}P)_{ii}\, \Delta_{li} = -\, r_i\, \Delta_i$$

eşitliğinden hesaplanır. Redundanz olarak adlandırılan

$r = n - u = \text{iz}\,\{Q_{vv}P\}$ Fazla Ölçü Sayısı

ve herhangi bir ölçünün redundanz payı

$r_i = (Q_{vv}P)_{ii}$ Fazla Ölçü Sayısındaki Payı

$(Q_{vv}P)$ matrisinin l_i ölçüsüne ilişkin ana köşegen terimidir.

$$r = n - u = \Sigma r_i$$

$$r = \Sigma\,(Q_{vv}P)_{ii} = \text{iz}\,\{Q_{vv}P\}$$

jeodezik ağlarda ölçülerin Redundanz Payları önemli birer güven ölçütüdür. Bunlar herhangi bir ölçüde yapılacak kaba hatanın yüzde kaçının, bu ölçüye ilişkin düzeltmeye yansıyacağını gösterirler. Başka bir deyişle redundanz payı, bir ölçünün diğer ölçüler yardımı ile kontrol edilebilir olmasının ölçütüdür. Bu nedenle, ölçülerin birbirini karşılıklı olarak kontrol edebilmeleri için redundanz paylarının 1 = % 100'e yakın olmaları istenir.

Ölçülerin redundanz payları genellikle $r_i > 0{,}5$ olmalı, zorunlu hallerde bu sınır $r_i > 0{,}3$ olarak belirlenmelidir.

Model Hatalarının Genel Testi

Aynı türden benzer ölçülerin değerlendirilmesi sonucunda elde edilen birim ölçünün ortalama hatasının öncül (a priori) değeri m_o ya da kuramsal standart sapma σ_oın bilindiği durumlarda Model Hipotezinin Testi için kurulan

$$H_{01} : E\,\{m_o^2\} = E\,\{m_o^2\} = \sigma_o^2 \qquad \text{Sıfır Hipotezi}$$

Ölçü hatalarının umut değerlerinin sıfır olması öngörülerek

$$H_{02} : E\,\{\Delta_l\} = 0$$

biçimine dönüştürülebilir. Hatalı ölçülerden

$$s_o^2 = \frac{v^T P\, v}{n - u} = \frac{v^T P\, v}{r}$$

bağıntısı ile hesaplanan ortalama hatanın kuramsal standart sapmadan farklı olacağı düşüncesi ile

$$H_{S2} : E\,\{s_o^2\} \neq \sigma_o^2 \qquad \text{Seçenek Hipotezi}$$

kurulur. Hatalı ölçülerden hesaplanan

$$T = \frac{s_o^2}{\sigma_o^2} \qquad \text{Test Büyüklüğü}$$

merkezil F-Dağılımına uymaz. Söz konusu dağılımın dış merkezlik parametresi için

$$E\,\{\frac{s_o^2}{\sigma_o^2}\} = E\,\{\frac{v^T P\, v}{r\,\sigma_o^2}\} = E\,\{\frac{m_o^2}{\sigma_o^2}\} + E\,\{\frac{\Delta_v^T\, P\, \Delta_v}{r\,\sigma_o^2}\}$$

umut değer bağıntısından yararlanarak

$$w = \frac{\Delta_v^T\, P\, \Delta_v}{\sigma_o^2} \qquad \text{Dış Merkezlik Parametresi}$$

eşitliği elde edilir. Buradan, hatalı ölçülerle hesaplanan umut değer bağıntısı

$$E\left\{\frac{s_o^2}{\sigma_o^2}\right\} = 1 + \frac{w}{r}$$

biçimini alır. Gücü γ_o = % 80 olan bir hipotez testi ile geçersiz sayılan bir sıfır hipotezi model hatalarının belirlenmesi için yeterlidir (Baarda 1977). Böyle bir hipotezin yanılma olasılığı α_0, ikinci tip hata olasılığı β_0 ile gösterilirse dış merkezlik parametresi

$$w = \frac{\Delta_v^T\, P\, \Delta_v}{\sigma_o^2} = \frac{\Delta^T P\, Q_{vv} P \Delta}{\sigma_o^2}$$

bağıntısının sınır değeri

$$w_o = f\,(\alpha_0\,,\ \beta_0\,,\ r,\ \infty)$$

biçiminde karmaşık bir kapalı fonksiyondur. Bu fonksiyonun sayısal değerleri için düzenlenmiş grafiklerden yararlanılır (Baarda, 1968).

$w \geqslant w_o$ ise Kurulan Model Hatalıdır.

Gözlemlerden birinde ya da birkaçında olası kaba hatalar, Uyuşumsuz Ölçüler Testi ile ayıklanmalı, gözlemlerde indirgeme hatalarının bulunup bulunmadığı ya da aletlerde ayar hatası olup olmadığı denetlenmelidir.

İç Güven Ölçütü

Bir dengeleme hesabını model hatalarından arındırmak için kurulan

$H_o : E\,\{\Delta\} = 0$ Sıfır Hipotezi

ve

$H_S : E\,\{\Delta\} = a\,.\,c$ Seçenek Hipotezi

biçiminde kurulur.

c : Ölçülerin Model Hatalarına Etkime Katsayıları

a : Bir Ölçek Katsayısı

Ölçü hatalarının seçenek hipotezindeki değerleri, dış merkezlik parametresini veren w eşitliğinde yerine konursa

$$a^2\, \frac{c^T P\, Q_{vv} P\, c}{\sigma_o^2} \geqslant w_o$$

$$a^2 \geqslant \frac{w_o \, \sigma_o^2}{c^T P \, Q_{vv} P \, c}$$

bağıntıları elde edilir. Bir ağda oluşan model hatalarının gerçek değerleri bilinemez. Bu nedenle, yapılan ölçülerin birbirini karşılıklı olarak ne ölçüde kontrol edebildikleri sorusuna İç Güven Ölçütü ile cevap aranır.

Ölçülerden yalnızca birinde sözgelimi l_j ölçüsünde Δ_j kadar bir kaba hata yapıldığı varsayılırsa

$$a = \Delta_j$$

yazılarak

$$\Delta_j^2 \geqslant \frac{w_o \, \sigma_o^2}{e_j^T P \, Q_{vv} P \, e_j} = \frac{w_o \, \sigma_o^2}{(P \, Q_{vv} P)_{jj}}$$

$$\begin{array}{cccccccccc} e_j^T = [& 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0] \\ & 1 & 2 & . & . & j & . & . & n \end{array}$$

ya da korelasyonsuz gözlemlerin dengelendiği modellerde

$$\Delta_j^2 \geqslant \frac{w_o \, \sigma_o^2}{p_j \, r_j}$$

p_j : l_j gözleminin ağırlığı

r_j : l_j gözlemenin redundanz payı (fazla ölçü sayısındaki payı)

Δ_j kaba hatasının sınır değeri olarak

$$|\Delta_{oj}| = \sigma_o \sqrt{\frac{w_o}{p_j \, r_j}} = \sigma_j \sqrt{\frac{w_o}{r_j}}$$

$$|\Delta_{oj}| \cong m_j \sqrt{\frac{w_o}{r_j}} \quad \text{Kaba hatanın sınır değeri}$$

Bu sınır değerler, bir ağda yapılan ölçülerden herhangi biri olan l_j nin diğer ölçüler yardımıyla kontrol edilebilir olmasının ölçütü olarak kullanılır ve İç Güven ölçütü olarak adlandırılır. İç Güven Ölçütü, bir ölçüdeki kaba hatanın Model Hipotezinin Testi ya da Model Hatalarının Genel Testi yöntemlerinin biriyle açığa çıkarılabilmesi için en az ne büyüklükte bir değere ulaşması gerektiğini gösterir. İyi kontrol edilebilir bir jeodezik ağda iç güven ölçütleri birbirine yakın ve oldukça küçük sayısal değerler almalı ve gözlemlerden hiçbirinde

$\Delta_{oj} \leqslant 8\, m_j$ Sınır Değeri

aşmamalıdır. Ölçü hatalarının hepsi, karşılıklı olarak birbirini ve dengeleme modelini etkilediklerinden önce İç Güven Ölçütü Δ_{oj} ya da

$T_j = \dfrac{v_j}{m_{v_j}}$ Test Büyüklüğü

değerinin en büyük olduğu l_j ölçüsü ayıklanıp gereğinde yenilendikten sonra yeni bir dengeleme yapılmalı ve yine geçersiz bir model hipotezi elde edilirse, her dengeleme işleminden sonra yalnızca bir ölçünün ayıklanması ya da yinelenmesi işlemine model hipotezi geçerli oluncaya kadar devam edilmelidir.

Dış Güven Ölçütü

Ortaya çıkarılamayan bir model hatasının koordinat bilinmeyenlerine etkisi, dengeli ölçülere etkisinden çok daha önemlidir. Dengeli bir ağdan söz edildiğinde ilk akla gelen, hemen her zaman kullanılan dengeli koordinatlar olur.

Herhangi bir ölçüde yapılan sınır değer Δ_{oj} kadar bir hatanın koordinat bilinmeyenlerine etkisi

$$x = Q\, A^T P\, l$$

bağıntısından yararlanarak

$$\Delta x = Q\, A^T P\, e_i\, \Delta_{oi}$$

$$\Delta x = Q\, a_i^T\, p_i\, \Delta_{oi}$$

a_i : A matrisinin i. satırı

p_i : l_i ölçüsünün ağırlığı

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten, herhangi bir l_i ölçüsünde yapılan Δ_{oi} kadar bir hatanın ağdaki koordinat bilinmeyenlerinin tümünü etkilediği açıkça görülmektedir. Koordinat bilinmeyenleri vektörü x, ağda koordinatı değişmez alınan sabit noktalara (ağın datumuna) bağlı olduğundan, koordinat hataları Δx de ağın datumuna bağlıdır. Ağda başka noktaların koordinatları değişmez alınırsa bambaşka bir koordinat hataları vektörü Δx elde edilir.

Ağın dış güveni için datuma bağlı olmayan bir ölçüt elde edilmek istenirse

$$\delta_{oi}^2 = \Delta x^T K_{xx}^{-1}\, \Delta x = \frac{1}{m_o^2}\, \Delta x^T\, Q_{xx}^{-1}\, \Delta x = \frac{1}{m_o^2}\, \Delta x^T\, Q^{-1}\, \Delta x$$

biçiminde bir tanım yapılabilir (Niemeier, 1985). Δx in yukarıda verilen eşitliği yerine konursa

$$\delta_{oi}^2 = \frac{1}{m_o^2} \Delta_{oi}^2 \, e_i^T P A Q Q^{-1} Q A^T P e_i$$

$$\delta_{oi}^2 = \frac{1}{m_o^2} \Delta_{oi}^2 \, e_i^T P A Q A^T P e_i$$

$$Q_{vv} = P^{-1} - A Q A^T \, , \quad A Q A^T = P^{-1} - Q_{vv}$$

$$\delta_{oi}^2 = \frac{1}{m_o^2} \Delta_{oi}^2 \, e_i^T P (P^{-1} - Q_{vv}) P e_i$$

$$\delta_{oi}^2 = \frac{1}{m_o^2} \Delta_{oi}^2 \, e_i^T P e_i - e_i^T P Q_{vv} P e_i$$

$$\delta_{oi}^2 = \frac{1}{m_o^2} \Delta_{oi}^2 \, e_i^T P e_i (1 - r_i) = \frac{1}{m_o^2} \Delta_{oi}^2 \, p_i (1 - r_i)$$

$$\delta_{oi}^2 = m_o^2 \frac{w_o}{p_i r_i}$$

$$\delta_{oi}^2 = \frac{1 - r_i}{r_i} w_o \qquad \text{Dış Güven Ölçütü}$$

elde edilir. Bilinmeyenlerin gelişigüzel bir fonksiyonunun

$$\varphi = \Phi(x)$$

maksimum hatası $\Delta_{o\varphi}$ ile gösterilirse

$$\delta_{oi} \geqslant \frac{\Delta_{o\varphi}}{m_\varphi}$$

bağıntısı geçerli olur ve $\Delta_{o\varphi}$ hatası Δ_{oi} ve δ_{oi} yardımıyla hesaplanabilir (Baarda 1976).

İyi planlanmış ve dengelemenin matematik modeli doğru kurulmuş bir jeodezik ağda

Redundanz payları	$r_i > 0{,}3$ ya da $0{,}5$
Ortaya çıkarılamayan kaba hataların sınır değerleri	$\Delta_{oi} \cong (6$ ya da $8)\, m_i$
Hataların koordinatlara etkime katsayıları	$\delta_{oi} \cong 6$ ya da 10

sınırları arasında kalmalıdır.

4- SONUÇ

Burada sözü edilen duyarlık ve güven ölçütlerinin herbiri, jeodezik ağların optimizasyonu için amaç fonksiyonu olarak seçilebilir. Ağların duyarlık yönünden optimizasyonu için ana varyans bileşenleri ve ana bileşen vektörleri hesaplandıktan sonra, ağda duyarlık yönünden yetersiz görülen noktalar ve bu zayıflıkların doğrultuları belirlenir. Gereğinde ağa yeni noktalar eklenerek duyarlık yönünden yetersiz oldukları belirlenen doğrultular için ek ölçme planı düzenlenir. Geliştirilmiş ölçme planından yararlanarak söz konusu duyarlık ölçütleri yeniden hesaplanır. Ağdaki tüm noktalar duyarlık yönünden yeterli duruma getirilir. Ağın tümü için kriterium matrisleri oluşturulur. Ağ noktalarının yaklaşık koordinatları ve geliştirilmiş ölçme planından yararlanarak elde edilen kuramsal varyans-kovaryans matrisi Σ_{xx}, kriterium matrisi C_{xx} ile karşılaştırılır. Kuramsal varyans-kovaryans matrisi ile öngörülen kriterium matrisi eşdeğer bulunursa, kurulması planlanan ağın duyarlık yönünden en uygun (optimum) durumda olduğuna karar verilir.

Ağda oluşabilecek model hatalarının denetlenmesi amacıyla her ölçüye ilişkin redundanz payları r_i hesaplanır. Ortalama redundanz payı $r_o = 1 - u/n$ değerinden çok büyük r_i değerlerine ilişkin ölçüler gözlem planından çıkarılır. Ortalama redundanz payı r_o dan çok küçük r_i değerlerine ilişkin ölçülere dik yönde yeni ölçüler planlanır. Ölçü hatalarının koordinatlara etkime katsayıları $\delta_{oi} \leqslant 6$ olan ölçülerin diğer ölçüler yardımıyla iyi denetlenebilir durumda olduklarına karar verilir. Söz konusu ölçüler de gözlem planından çıkarılarak ağın masraf, zaman ve emek yönünden en uygun durumda bulunması sağlanır.

KAYNAKLAR

Aksoy, A. (1984), Uyuşumsuz Ölçüler Testi, Harita Dergisi, Sayı 84, Temmuz 1984, Ankara.

Alberda, J.E. (1980), A Reviev of Analysis Techniques for Engineering Control Shemes. Proc. Industrial and Engineering Survey Conference, London 1980.

Baarda, W. (1977), Measures for the Accuracy of Geodetic Networks, IAG-Symp., Sopron 1977.

Bill, R. (1984), Eine Strategie zur Ausgleichung und Analyse von Verdichtungsnetzen. DGK C-295, München 1984.

Grafarend, E. vd. (1979), Optimierung geodaetischer Messoperationen, Karlsruhe 1979.

Koch, K.R. (1980), Parameterschaetzung und Hypothesentests in linearen Modellen, Bonn 1980.

Mierlo, J. van (1982), Difficulties in Defining the Ouality of Geodetic Networks, Sehr. Reihe Verm. HSBw Nr. 7, München 1982.

Niemeier, W. (1982), Principal Component Analysis and Geodetic Networks Schr. Reihe Verm. HSBw Nr. 7, München 1982.

Niemeier, W. (1985), Netzqualitaet und Optimierung. Geodaetische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II., s. 153, Stuttgart.

Öztürk, E. (1982), Jeodezik Ağlarda Güven Ölçütleri ve Ölçme Planının Optimizasyonu, KTÜ Yayınları 149, Trabzon 1982.

Öztürk, E. (1986), Doğrultu-Kenar Ağlarının Dengelenmesi, Harita-Kadastro Mühendisliği Dergisi, Sayı 54 - 55, s. 58, Ankara 1986.

Pelzer, H. (198), Beurteilung der Genauigkeit und Zuverlaessigkeit. Geodaetische Netze in Landes- und Ingenieur verm. s. 329, Stuttgart 1980.

Pelzer, H. (1985), Überprüfung von Ausgleichungsmodellen. Geodaetische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II, s. 121, Stuttgart 1985.
Şerbetçi, M. (1986), Bilinmeyenlerin de Ölçülmesi ile Yapılan Dengeleme, TUJJR Jeodezi Komisyonu Toplantıları, Mayıs 1986, Ankara.
Ulsoy, E. (1980), Pratik Matris Hesabı ve Dengeleme Hesabına Uygulanması, İstanbul 1980.
Wolf, H. (1979), Ausgleichungsrechnung II, Aufgaben und Beispiele zur praktischen Anwendung, Bonn 1979.