SIKLAŞTIRMA AĞLARINDA AĞIRLIK OPTİMİZASYONU

Cihangir ÖZSAMLI

Özet :

Jeodezik Ağlarının Optimizasyonuna ilişkin çalışmalar, yeni değildir. Ancak, geçen yüzyılın sonlarında başlamış olan bu çalışmalar, nümerik hesaplama olanaklarındaki yetersizlikler nedeniyle oldukça dar bir çerçeve içinde kalmıştır. Bilgisayarların yaygın olarak kullanım alanına girmesine paralel olarak, Jeodezik Ağların Optimizasyonu yeniden güncellik kazanmış ve üzerinde oldukça yoğun olarak çalışılan bir konu haline gelmiştir. Ölçüt Matrislerinin Ağ Optimizasyonunda kullanılmaya başlanması ile bu çalışmalar daha da hız kazanmıştır.

Bu çalışmada, Sıklaştırma Ağlarının Ölçüt Matrisleri ile Ağırlık Optimizasyonu üzerinde durulmuştur.

I. Giriş

Jeodezik Ağların, doğruluk, güven, ekonomi ölçütlerinden veya bunların karışımından oluşturulacak, ağın datum, şekil, ölçü ağırlıkları ve yaklaşık koordinatlar gibi parametrelerinin fonksiyonlarıyla tanımlanan amaç fonksiyonunun gerçekleşmesini sağlayacak şekilde kurulması, yani seçime bağlı parametrelerinin amaç fonksiyonunu optimal yapacak şekilde belirlenmesi, Jeodezik Ağların Optimizasyonu olarak tanımlanır (Ayan, 1981).

Jeodezik Ağların Optimizasyonu; ağır ön koşullarla saptanmayan, ölçü planı, ölçü ağırlıkları gibi, seçime bağlı elemanlarına göre, Grafarend (1974) tarafından dört bölüme ayrılmaktadır.

O.Dereceden Optimizasyon :

Tahmin edilecek $\hat{x}$ parametreleri ve bunların, ağ noktalarının doğruluk durumlarını gösteren $Q_{\hat{x}\hat{x}}$ Kofaktörler Matrisi için amaca uygun bir referans sistemi seçilir (Datum Problemi). Çözüm Serbes Ağ Dengelemesi ile gerçekleştirilir.

1. Dereceden Optimizasyon :

Bu problemde, Amaç Fonksiyonu sağlayan optimal bir ağ şekli aranmaktadır. Ağın şekli, Dizayn matrisi A ile tam olarak belirlenebilir. Bu nedenle problem, Dizayn Matrisinin belirlenmesidir.

2. Dereceden Optimizasyon :

Verilen bir Ağ şekli için, ölçme ağırlıklarının optimal olarak belirlenmesidir. Ağırlık Optimizasyonu olarak da isimlendirilir.

3. Dereceden Optimizasyon ;

Planlanmış veya mevcut bir Jeodezik Ağın, ilave yeni noktalar ve(ya) ölçmelerle takviye edilerek düzeltilmesi, problemidir.

Yukarıda da belirtildiği gibi jeodezik ağlar, seçilmiş olan bir amaç fonksiyonunu sağlayacak şekilde oluşturulurlar. Amaç fonksiyonu olarak skaler bir fonksiyon alınabildiği gibi, ağın Varyans-Kovaryans Matrisinin; hata teorisine uygun ve arzu edilen ağ özelliklerinin (homojen-izotrop ağ) yansıtıldığı, a-priori olarak belirlenen, ideal bir Varyans-Kovaryans Matrisine (Ölçüt Matrisi) mümkün olduğu kadar uyması da istenebilir. Bu tanıma göre, ölçüt matrisleri ile optimizasyon, Ağ optimizasyonunun en genel şeklini oluşturmaktadır. (Ayan, 1981).

Jeodezik Ağlarda kullanılan ölçüt matrislerine ilişkin geniş bir inceleme, Bill (1984) de mevcuttur.

Bu çalışmada, Dayalı Ağların Ölçüt Matrisleri ile Ağırlık Optimizasyonu üzerinde durulacaktır.

II. Ağırlık Optimizasyonu İçin Bazı Çözüm Yöntemleri :

Ağırlık Optimizasyonunda amaç, ölçülerin p ağırlık matrisini belirlemektir. Bu amaca yönelik çok sayıda çözüm yöntemi vardır. Bunlardan birkaçı aşağıda verilmiştir.

- Simülasyon Yöntemleri, Monte-Carlo Dizaynı (Schmitt, 1979).
- En Küçük Kareler Çözümleri (Schmitt, 1979).
- Lineer Programlama (Ayan, 1981)
- Özdeğer Problemine Dayalı Yöntemler (Jaeger, 1988)

Burada sadece En Küçük Kareler (EKK) çözümlerinden, U, m Yöntemi açıklanacaktır. (Hoppee ve Kaltenbach, 1989).

U-m Yöntemi :

Bu çözüm yöntemi direkt Ölçüt Matrisine yaklaşımı değil, onun tersine yaklaşımı amaçlar. Yani,

$$(A^T P\ A)^{-} \doteq Q_{xx} \qquad (2.1)$$

baz denklemi için,

$$(A^T P\ A) \doteq Q^{-}_{xx} \qquad (2.2)$$

şeklinde tanımlanan ters problem çözülür. Burada,

Q_{xx} : Ölçüt Matrisi

A : Dizayn Matrisi

P : Ağırlık Matrisi

anlamındadır.

P matrisinin köşegen bir matris olduğu göz önüne alınırsa, (2.2) denklemi,

$$(A^T \odot A^T)\, p = q \qquad (2.3)$$

$$p = \mathrm{vecd}\,(P)\ ;\ q = \mathrm{vec}\,(Q_{xx}^{-})$$

şeklinde yazılabilir. Burada "$\odot$", Khatri-rao matris çarpımıdır (Rao,Mitra, 1971). "$\doteq$" Gösterimi ise, denklem sisteminin tutarsız (inkonsistenz) olduğunu göstermektedir.

(2.3) Denkleminde genellikle, $(A^T \odot A^T)$ Khatri-rao çarpımının satır sayısı p bilinmeyenlerinin sayısından fazladır ve denklem bu nedenle tutarsızdır. Dolaylı Ağ dengelemesinin bilinen fonksiyonel modeline benzer olarak (2.3) denklemi, r tutarsızlık vektörünün (inkonsistenz parametern) ilavesi ile tutarlı (konsistenz) hale gelir.

$$(A^T \odot A^T)\, p = q + r \qquad (2.3a)$$

(2.3a) Denkleminden, $r^T r \Rightarrow$ min koşulu ile;

$$[(A^T \odot A^T)^T (A^T \odot A^T)]\, p - (A^T \odot A^T)\, q = 0 \qquad (2.4a)$$

veya

$$(AA^T * AA^T)\, p - (A^T \odot A^T)^T\, q = 0 \qquad (2.4b)$$

$$(A^T \odot A^T)^T (A^T \odot A^T) = (AA^T * AA^T)$$

olur. Burada "*", Hadamard Çarpımını ($A*b = a_{ij}\ b_{ij}$) gösterir. Çözüm vektörü ilave koşullarla ($p_{i-} > O$) sınırlandırılmamıştır. Bu nedenle de çözüm negatif ağırlıklar içerebilir. (2.4) Sistemlerinin çözümü, ölçmelerin optimal ağırlık oranlarını gösterir. (2.4) Eşitlikleri ile elde edilen çözüm vektöründen negatif ağırlıklı ölçüler ölçme planından, çözüm negatif ağırlıklar içermeyecek şekilde, adım adım elimine edildikten sonra

$$Pt = \lambda P = \mathrm{diag}\,(\lambda\, p) \qquad (2.5)$$

lineer dönüşümü göz önüne alınır. λ Çarpanı, normal denklemler matrisinin tersi ile verilen ölçüt matrisi arasındaki sapmalar en küçük olacak şekilde,

$$\lambda = \frac{Sp\,[(A^T PA)^- (A^T PA)^-]}{S_p\ [(A^T PA)^- Q_{xx}]} \qquad (2.6a)$$

belirlenir. Eğer sadece hata elipsinin şeklini ve büyüklüğünü belirleyen, ölçüt matrisinin köşegen elemanları ile sınırlı kalınırsa, λ için,

$$\lambda = \frac{Sp\,[(A^T PA)^- * (A^T PA)^-]}{Sp\,[(A^T PA)^- * Q_{xx}]} \qquad (2.6a)$$

elde edilir Doğrusal dönüşüm sonucu tek tek ölçmeler arsındaki ağırlık oranları değişmez. $P_t = \lambda P$ ile elde edilen çözüm. "Ters Ölçüt Matrisinin Modifize Edilmiş EKK Yaklaşımını" gösterir.

III. Sıklaştırma Ağlarında Ağırlık Optimizasyonu:

III. 1- Dinamik Bağlantılı Ağ:

Koordinat bilinmeyenleri vektörü $\hat{x}$,

$\hat{x}_F$: Bağlantı Noktalarının Koordinatlar Vektörü,

$\hat{x}_N$: Yeni Noktaların Koordinatlar Vektörü

olmak üzere, ikiye ayrılmış olsun. Bu durumda dolaylı ağ dengelemesinin fonksiyonel modeli,

$$l + v = A_F \hat{x}_F + A_N \hat{x}_N \tag{3.1}$$

şeklinde olur. Burada A_F ve A_N, bilinmeyenlerin gruplarına karşılık gelen Dizayn Matrisleridir. l ölçmeler vektörü ve v de düzeltmeler vktörüdür. Normal denklemler ise,

$$(A^T P A) = \begin{vmatrix} A_F^T P \quad A_F & A_F^T P \quad A_N \\ A_N^T P \quad A_F & A_N^T P \quad A_N \end{vmatrix} \tag{3.2}$$

şeklinde olur. Bu matris görüldüğü gibi dolu bir matristir. Bu durumda, (2.2) temel eşitliği,

$$\begin{vmatrix} A_F^T P \quad A_F & A_F^T P \quad A_N \\ A_N^T P \quad AF & A_N^T P \quad A_N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Q_{x_F x_F} & Q_{x_F x_N} \\ Q_{x_N x_F} & Q_{x_N x_N} \end{vmatrix} \tag{3.3}$$

şeklinde olur. Bilinmeyen ölçü ağırlıkları ise, (2.4a) veya (2.4b) ye göre,

$$[\,(A^T \odot A^T)^T (A^T \odot A^T)\,]\, p - (A^T \odot A^T)\, q = 0$$

veya (3.4)

$$(AA^T * AA^T)\, p - (A^T \odot A^T)^T q = 0$$

$$A^T = (A_F,\ A_N)$$

olur. Bu eşitliklerden elde edilen P çözüm vektörü, ölçüt matrisine en iyi yaklaşımı sağlar. Ölçüt Matrisine daha iyi bir uyum, (2.6a) ve (2.6b) doğrusal dönüşümleri ile elde edilir.

Serbest Ağlarda, tekil normal denklemler matresi A^TPA ile Q_{xx} ölçüt matrisi arasında bir rang farklılığı vardır. Bu rang farklılığını gidermek için, Ölçüt matrisi, S- Dönüşümü yardımıyla (Illner, 1986), normal denklemlerin datum sistemine dönüştürülür.

Bilindiği gibi, serbest kenar ve doğrultu ağları için daima regüler bir EKK Çözümü vardır (Schmitt, 1979). Buna göre (3.4) eşitliklerinde $(...)^{-1}$ Cayley Tersi kullanılabilir. Bu durumda,

$$p = [\,(A^T \odot A^T)^T (A^T \odot A^T)\,]^{-1} (A^T \odot A^T)^T q$$

veya (3.5)

$$p = (AA^T * AA^T)^{-1} * (A^T \odot A^T)^T q$$

$$A^T = (A_F, A_N)$$

olur.

III. 2- Zorunlu Bağlantılı Ağ:

Bu Optimizasyon düzeninde, ilave ölçmelerin veya yeni noktaların bağlantısı için, üst derece ağın noktaları hatasız olarak göz önüne alınır. Bu tür bir dolaylı ağ dengelemesinin koşullarla birlikte fonsiyonel modeli.

$$l + v = A_F \hat{x}_F + A_N \hat{x}_N$$

$$0 = I x_F + 0 x_N$$

şeklindedir.

$$I x_F = 0$$

Koşulunun göz önüne alınması ile.

$$(A^T P A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_N^T P A_N \end{vmatrix} \qquad (3.6)$$

normal denklem sistemi elde edilir. Sistem görüldüğü gibi sadece ağda bağlanan yeni noktalar için, normal denklem parçasını içerir. Buna göre de, sadece bu noktaların bilinmeyenleri için. Ölçüt matrisindeki amaçlar ideal Varyans-Kovaryans matrisi olarak ileri sürülür. Yani bu durumda (3.3) eşitliğinin sağ yanı,

$$Qxx = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_{x_N x_N} \end{vmatrix} \qquad (3.7)$$

şeklinde, (3.6) ya benzer bir forma gelir.

Eğer sadece (3.6) ve (3.7) eşitliklerindeki yeni noktalar için, alt matrisler göz önüne alınırsa, bağlantı noktaları hatasız daylı bir ağın ağırlık optimizasyonu için çözüm düzeni,

$$A_N^T P A_N = Q^{-1}_{xx} \qquad (3.8)$$

olur.

$A_N^T PA_N$ ve Q_{xx} matrisleri arasında bir rang farklılığı yoktur. İki matris de regülerdir.

Şimdi (3.8) denklemine, U, m Yöntemi uygulanırsa,

$$[(A_N^T \odot A_N^T)^T (A_N^T \odot A_N^T)]\, p - (A_N^T \odot A_N^T)\, q = 0$$

veya (3.9)

$$(A_N A_N^T * A_N A_N^T)\, p - (A_N^T \odot A_N^T)^T\, q = 0$$

$$q = vec\,(Q^{-1}_{xx})$$

elde edilir.

Dayalı ağların Optimizasyonunda, (mxm) boyutlu (m, ölçme sayısıdır) $C^T C$ [c= ($A^T \odot A^T$)] optimizasyonun normal denklemler matrisi serbest ağların aksine genellikle tekildir. (3.9) Eşitliklerinin p ağırlık vektörüne göre çözülmesi için, Cayley Tersi yerine $(...)^+$ Pseudo Tersler kullanılmalıdır. Yani optimizasyonun normal denklemler matrisi, sıfır olan özdeğerlere karşılık gelen öz vektörler matrisi ile genişletilir ve çözüm vektörü için,

$$p = [(A_N^T \odot A_N^T)^T (A_N^T \odot A_N^T)]^+ (A_N^T \odot A_N^T)^T\, q$$

veya (3.10)

$$p = (A_N A_N^T * A_N A_N^T)^+ (A_N^T \odot A_N^T)^T\, q$$

elde edilir.

Burada da, Pt $= \lambda$ p doğrusal dönüşümü için, tüm ölçüt matrisine uyum amaçlanırsa,

$$\lambda = \frac{Sp\ [(A_N^T P A_N)^{-1} * (A_N^T P A_N)^{-1}]}{Sp\ [(A_N^T P A_N)^{-1} * Q_{xx}]} \qquad (3.11a)$$

ölçüt matrsinin sadece köşegen terimlerine uyum istenirse,

$$\lambda = \frac{Sp\ [(A_N^T P A_N)^{-1} * (A_N^T P A_N)^{-1}]}{Sp\ [(A_N^T P A_N^{-1} * Q_{xx}]} \qquad (3.11b)$$

elde edilir.

IV. Sonuç:

Bu çalışmada, Sıklaştırma Ağlarının ölçüt matrisleri ile ağırlık optimizasyonu üzerinde durulmuştur. Çözüm yöntemi olarak, Bağlantılı Ağlara etkin bir şekilde uygulanabilen, U,m Yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemde, çarpanı (Normlandırma faktörü olarak da isimlendirilir), normal denklemler matrisi ile ölçüt matrisi arasındaki sapmalar en küçük olacak şekilde belirlendiği için, bizzat Ölçüt Matrisine de iyi bir yaklaşım sağlanmış olmaktadır.

KAYNAKLAR

Ayan, T. : Jeodezik Ağların Optimizasyonu. Doçentlik Tezi İstanbul 1981.

Ayan, T. : Jeodezik Ağların Geliştirilmesi. Türkiye I. Harita Bilimsel ve Teknik Kurultayı. 23/27 Şubat 1987, Ankara.

Bill, R. : Kriteriummatrizen ebener geodaetischer Netze. DGK, Reihe A, Nr. 102, München. 1985.

Grafarend, E. : Optimization of Geodetic Networks. Bolletino die Geodesia e Scienze Affini. 33, S. 351, 406, 1974.

Hoppe, H : Gewichtsoptimierung angeschlossener geodaetisc

Kaltenbach, H : er Netze. DGK, Reihe A, Nr. 105, München. 1989.

Illner, I : Datumfestlegung in freien Netzen. DGK, Reihe C, Nr. 309, München. 1986.

Illner, M : Ausgleichungs und Optimerungsmodelle der der Netzverndictung. AVN - 94. S. 93 - 104, 1986.

Jaeger, R. : Analyse und Optimierung geodaetscher Netze nach spektralen Kriterien und mechanische Analogien. DGK, Reihe C, Nr. 342, Müinchen. 1988.

Rao, C. R. : Generalized Inverse of Matrices and its Applications. John Wiley and Sons, Inc. New-york. 1971.

Schimitt, G : Zur Numerik der Gewichtsoptimierung. DGK, Reihe C, Nr. 256, München. 1979.

BAŞKAN- Evet, Sayın Cihangir Özşamlı'ya ben de teşekkür ederim. Evet, sorusu olan?.. Buyurun Sayın Öztürk.

PROF. DR. ERGÜN ÖZTÜRK - Benim sorumun birincisi : Düşünsel ölçüt bakisi Q-X en küçük alet dengelemesine göre bir R eklentileri getiriyor, R düzeltmeleri getiriyoruz. Bu düzeltmeler doğrudan RTR minumum olması biçiminde düşünmek yerine, acaba R'lerin de bir ağırlığını da vererek RTPR biçiminde düşünebilir miyiz; onu öğrenmek istiyoruz.

Bir de ikinci olarak : Bir landaparametresi vardı, orasını kaçırdım. Bu landaparametresini niçin hesaplıyorduk, sonunda ne amaçla kullanıyorduk? İkinci olarak konuşmacı arkadaştan bunu öğrenmek istiyorum. Teşekkür ederim.

CİHANGİR ÖZŞAMLI- Şimdi, birinci soru için şunu söyleyebilirim: Böyle bir çözümü ben araştırmadım ve görmedim de diyebilirim. Ancak, düşünülebilir bir nitelikte olduğunu söyleyebilirim salt olarak.

İkinci soru zannediyorum landaparametre idi. "Landaparametresi, yöntemin birinci adımında, yani sıfır ve negatif ölçüler incelendikten sonra -ki, literatürde şöyle bir ifade var- bu indirgenen T'ler, sıfır ve negatif indirgenen T'lerle ölçüt maddesine iyi bir yaklaşım elde edilir" deniyor. "Artı" deniyor ve bir ilave daha yapılıyor, deniyor ki, "Eğer biz normal denklemler ile ölçüt maddesi inversi arasındaki sapmaları minumum yapacak şekilde bir normlandırma faktörü de deniyor, belirleyip -ki, bu landa diye isimlendiriliyor- bununla P'leri nerede dönüşüme tabi tutarak, sonuçta daha iyi yaklaşımlı bir çözüm elde ederiz düşünceleri var. Yani, benim de onun ötesinde fazla bir şey söyleyecek durumum yok. Bu şekilde. Örneğin, Maykıl Dinler'in doktora tezinde de önerdiği çözümlerden birisi de bu, onu söyleyebilirim. Teşekkür ederim.

BAŞKAN - Tekrar teşekkür ediyoruz. Değerli dinleyiciler, şimdi Sayın Ramazan Koşdere "Beton Barajlarda Aplikasyon, Montaj ve Metraj" konusundaki bildirisini sunacaktır.