

ÜÇ BOYUTLU BENZERLİK DÖNÜŞÜMÜNDE BÜYÜK DÖNÜŞÜM PARAMETRELERİNİN KESTİRİLMESİ

Aydın ÜSTÜN, Hüseyin DEMİREL

ÖZET

Uydu gözlem teknikleriyle konum belirlemede ulaşılan yüksek doğruluk nedeniyle üç boyutlu konum belirleme önem kazanmış, günümüze değin ayrı değerlendirilen yatay ve düşey konum bilgilerinin birleştirilmesi ve uydu sistemlerinin verileriyle bütünleştirilmesi zorunluluğu ortaya çıkmıştır.

Var olan jeodezik ağların, uydu gözlem teknikleriyle sıklaştırılması ve yenilenmesi, bir yerel sistemden vazgeçilerek bir yenisine geçilmesi ve başka jeodezik uygulamalar, datumları farklı koordinat sistemleri arasında üç boyutlu dönüşümleri zorunlu kılmaktadır.

Bu çalışmada üç boyutlu benzerlik dönüşümü en genel biçimiyle ele alınmış, dönüşüm parametrelerinin ardışık dengelemeler ile kestirimi açıklanmış ve bir sayısal uygulama verilmiştir.

1. GİRİŞ

Koordinat dönüşümleri jeodezide sıkça karşılaşılan uygulamalardır. Dönüşüm bir sistemdeki geometrik bilgilerin (nokta koordinatları) bir başka sistemde tanımlanmasıdır. Çeşitli koordinat sistemlerinde üretilmiş nokta koordinatları arasında datum birliğini sağlamak ve kimi ödevleri çözmek için benzerlik dönüşümü gerekli olur.

Bir koordinat sistemini tanımlamak için gerekli elemanlara datum parametresi adı verilir. Üç boyutlu bir koordinat sistemi, üç öteleme, üç dönüklük ve bir ölçek parametresiyle tanımlanır. Ülke koordinat sisteminin dayandığı elipsoidin konumu, büyüklüğü ve dönüklüğüne ilişkin bilgiler datum parametreleridir. Koordinat dönüşümü bir anlamda

datum dönüşümüdür; bir datumda belirlenmiş konum bilgilerini bir başka datumda tanımlamaz.

GPS (Global Positioning System), özellikle jeodezik ağların yüksek doğrulukta oluşturulması, sıklaştırılması ve iyileştirilmesi olanağını sağlamıştır. Bu yöntemle elde edilen nokta koordinatlarının dayandığı koordinat sistemi üç boyutludur ve uydu gözlemleriyle boyutları belirlenmiş olan WGS84 (World Geodetic System 1984) elipsoidine bağlıdır. Bu elipsoidin merkezi, yeryuvarının ağırlık merkezi ve küçük eksenini dönme eksenini ile çakışmıştır.

Yalnızca yersel ölçme yöntemlerinin kullanıldığı günümüze değin ülkeler, gerçekte üç boyutlu konum belirleme ödevini bilinen nedenlerle yatay konum (iki boyutlu) ve düşey konum (tek boyutlu) belirleme ödevleri biçiminde ayrı ayrı ele almışlardır. Yatay konum için datumları farklı yerel elipsoidler ve düşey konum için yine datumları (sıfır yüzeyleri) farklı jeoitler kullanmışlardır. GPS' in yerel sistemlerle bütünleştirilebilmesi için öncelikle yatay ve düşey konum bilgilerinin global jeodezik dik koordinatlara dönüştürülmeleri gerekir. Sorun üçüncü boyutta olup ortometrik yüksekliklerin istenen doğruluk ile elipsoidal yüksekliklere dönüştürülmesinde yatmaktadır. Çözüm için doğruluğu yeterli bir jeoide ve elipsoid yüzeyinin jeoitden sapmalarına gereksinim vardır.

2. BENZERLİK DÖNÜŞÜMÜ

Benzerlik dönüşümü, ağ noktalarının göreceli konumlarının dönüşümden sonra da korunması temeline dayanır. Bir P noktasının koordinat vektörü (x, y, z) sisteminde \underline{x} ve (u, v, w) sisteminde \underline{u} ise aralarındaki ilişki (Şekil 1),

$$\underline{x} = \underline{t} + (1 + \Delta)\underline{R}\underline{u} \quad (1)$$

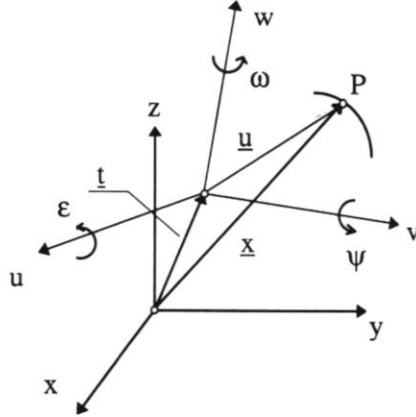
bağıntısı ile tanımlanır (Deniz, 1994). Burada,

$\underline{t} = [t_x, t_y, t_z]^T$: (u, v, w) sisteminin başlangıç noktasının (x, y, z) sistemindeki koordinatları (öteleme parametreleri),

$1 + \Delta$: İki koordinat sistemi arasındaki ölçek farkı,

R

: u, v, w eksenleri etrafındaki pozitif (saat ibresinin hareketine ters yönde) ϵ , ψ , ω dönüklük açılarına bağlı dönüklük matrisidir.



Şekil 1 Üç boyutlu benzerlik dönüşümü

R dönüklük matrisi u, v, w eksenleri etrafındaki ϵ , ψ ve ω dönüklük açılarının dönüşüm etkilerini gösteren,

$$\underline{R}_1(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & \sin \epsilon \\ 0 & -\sin \epsilon & \cos \epsilon \end{bmatrix}, \underline{R}_2(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix}, \underline{R}_3(\omega) = \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

dönüklük matrislerinin sıra ile çarpımlarına eşittir:

$$\underline{R} = \underline{R}_3(\epsilon)\underline{R}_2(\psi)\underline{R}_1(\omega)$$

(3)

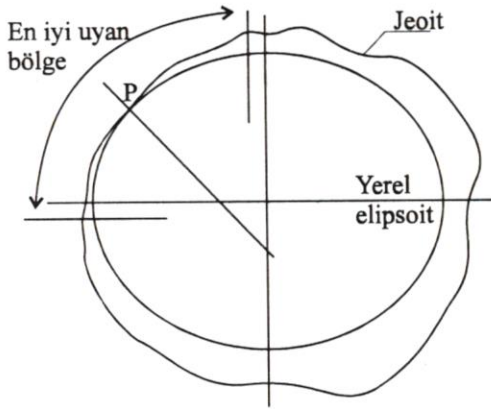
$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \omega & \cos \epsilon \sin \omega + \sin \epsilon \sin \psi \cos \omega & \sin \epsilon \sin \omega - \cos \epsilon \sin \psi \cos \omega \\ -\cos \psi \sin \omega & \cos \epsilon \cos \omega - \sin \epsilon \sin \psi \sin \omega & \sin \epsilon \cos \omega + \cos \epsilon \sin \psi \sin \omega \\ \sin \psi & -\sin \epsilon \cos \psi & \cos \epsilon \cos \psi \end{bmatrix}$$

Dönüşümün gerçekleştirilebilmesi için yukarıda açıklanan yedi dönüşüm parametresinin bilinmesi gerekir. Her iki koordinat sisteminde koordinatları bilinen en az üç ortak nokta varsa söz konusu parametreler en küçük kareler yöntemiyle kestirilebilir.

2.1. Dönüklük Açılarının Çok Küçük Olduğu Durumlarda Dönüşüm Parametrelerinin Belirlenmesi (Özel Çözüm)

18. yüzyıldan başlayarak günümüze değin, yeryuvarına geometrik olarak en uygun elipsoidin boyutlarını belirleme çalışmaları jeodezinin en önemli konularından biri olmuştur. Bu süreç içinde belirlenen çeşitli elipsoitlere bakıldığında boyutlarının birbirine yakın olduğu görülür. Uydular yardımıyla belirlenen elipsoitler dışında kalanlar, yersel yöntemlerle tanımlanan, ölçümlerin yapıldığı bölgelere iyi uyan ve bu bölgeler için referans yüzeyi olarak kullanılan elipsoitlerdir.

Elipsoit boyutlarının belirlenmesinde genel olarak jeoit ondülasyonlarının ya da çekül sapmalarının kareleri toplamının minimum olması koşulundan yararlanır. Elipsoidin konumlandırılması ve yönlendirilmesinde elipsoit yüzeyine indirgenen yersel ölçülerin deformasyonlarının minimum olması koşulu ölçüt olarak alınır ve bu özellikteki bir elipsoide yerel elipsoit adı verilir.



Şekil 2 Yerel elipsoit

Yerel elipsoitlerin konumlandırılmasında, yeryüzündeki bir noktanın jeoit normali ile elipsoit normali çakıştırılır. Böylece elipsoidin küçük ekseninin yeryuvarının dönme eksenine paralel olması, bunun sonucu olarak da jeodezik ve doğal dik koordinat sistemlerinin eksenlerinin yaklaşık paralel duruma gelmesi sağlanır (Şekil 2). Benzer biçimde başka bir yerel elipsoit için de aynı durum geçerli olacağından datumları farklı

elipsoitlere ilişkin jeodezik dik koordinat sistemlerinin karşılıklı eksenleri birbirine yaklaşık paralel olur. İki jeodezik koordinat sistemindeki eşlenik noktaların karşılıklı koordinatları arasındaki farklar küçüktür (≈ 200 m). Bu özellikler nedeniyle uygulamada genellikle dönüklük açılarının küçük olduğu dönüşüm problemleriyle karşılaşılır.

Dönüklük açılarının çok küçük olması durumunda (3)' de verilen dönüklük matrisi \underline{R} ,

$$\begin{aligned} \cos \varepsilon &\cong \cos \psi \cong \cos \omega \cong 1 \\ \sin \varepsilon &\cong \varepsilon, \quad \sin \psi \cong \psi, \quad \sin \omega \cong \omega \\ \sin \varepsilon \sin \psi &\cong \sin \varepsilon \sin \omega \cong \sin \psi \sin \omega \cong 0 \end{aligned} \quad (4)$$

nedeniyle

$$\underline{R} = \underline{I} + \underline{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \omega & -\psi \\ -\omega & 0 & \varepsilon \\ \psi & -\varepsilon & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

biçiminde gösterilebilir. (5) eşitliği (1)'de yerine yazılır ve $\Delta \underline{Q} \cong \underline{0}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\underline{t} + \underline{Q}\underline{u} + (1 + \Delta)\underline{u} - \underline{x} = 0 \quad (6)$$

denklem sistemi ortaya çıkar.

(6)' da geçen \underline{u} ve \underline{x} koordinatları düzeltilmesi gereken büyüklükler (hatalı ölçüler) olarak kabul edilir ve bunların yerine dengeli (düzeltilmiş) koordinatlar yazılırsa, aralarında bilinmeyenlerin de bulunduğu koşullu ölçüler dengelemesinin dönüştürülmüş (doğrusallaştırılmış) fonksiyonel modeli

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & u & 0 & -w & v \\ 0 & 1 & 0 & v & w & 0 & -u \\ 0 & 0 & 1 & w & -v & u & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \\ \Delta \\ \varepsilon \\ \psi \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u-x \\ v-y \\ w-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

elde edilir (Leick, 1990). Tüm eşlenik noktalara ilişkin koşul denklemleri (7)'ye benzer biçimde yazılır. Böylece oluşturulan fonksiyonel modele bilinmeyenli koşullu ölçüler dengelemesinin çözüm eşitlikleri uygulanarak, bilinmeyen dönüşüm parametreleri ve dengeli koordinatlar bulunur.

2.2. Dönüklük Açılarının Herhangi Büyüklükte Olduğu Durumlarda Dönüşüm Parametrelerinin Belirlenmesi (Genel Çözüm)

Koordinat sistemlerinin arasındaki açıların büyük olması durumunda (7) fonksiyonel modeli yetersiz kalır. (1) dönüşüm denklemleri ϵ , ψ ve ω dönüklük açılarının doğrusal olmayan fonksiyonlarıdır. Bilinmeyenlerin yaklaşık değerleri doğrudan belirlenemediğinden çözüm, art arda dengelemeler (iterasyon) ile gerçekleştirilir.

(1)'de \underline{u} ve \underline{x} koordinatları yerine bunların dengeli (düzeltilmiş) değerleri yazılır, \underline{R} dönüklük matrisinin (3)'te verilen eşiti göz önüne alınır ve (1) koşul denklemlerine Taylor serisi uygulanırsa,

$$\underline{R}_\epsilon = \frac{\partial \underline{R}}{\partial \epsilon} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \epsilon \sin \omega + \cos \epsilon \sin \psi \cos \omega & \cos \epsilon \sin \omega + \sin \epsilon \sin \psi \cos \omega \\ 0 & -\sin \epsilon \cos \omega - \cos \epsilon \sin \psi \sin \omega & \cos \epsilon \cos \omega - \sin \epsilon \sin \psi \sin \omega \\ 0 & -\cos \epsilon \cos \psi & -\sin \epsilon \cos \psi \end{bmatrix}$$

$$\underline{R}_\psi = \frac{\partial \underline{R}}{\partial \psi} = \begin{bmatrix} -\sin \psi \cos \omega & \sin \epsilon \cos \psi \cos \omega & -\cos \epsilon \cos \psi \cos \omega \\ \sin \psi \sin \omega & -\sin \epsilon \cos \psi \sin \omega & \cos \epsilon \cos \psi \sin \omega \\ \cos \psi & \sin \epsilon \sin \psi & -\cos \epsilon \sin \psi \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\underline{R}_\omega = \frac{\partial \underline{R}}{\partial \omega} = \begin{bmatrix} -\cos \psi \sin \omega & \cos \epsilon \cos \omega - \sin \epsilon \sin \psi \sin \omega & \sin \epsilon \cos \omega + \cos \epsilon \sin \psi \sin \omega \\ -\cos \psi \cos \omega & -\cos \epsilon \sin \omega - \sin \epsilon \sin \psi \cos \omega & -\sin \epsilon \sin \omega + \cos \epsilon \sin \psi \cos \omega \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} (1+\Delta_0)\underline{R} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{R}\underline{U} & \underline{R}_\varepsilon\underline{u} & \underline{R}_\psi\underline{U} & \underline{R}_\omega\underline{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta t_x \\ \delta t_y \\ \delta t_z \\ \delta \Delta \\ \delta \varepsilon \\ \delta \psi \\ \delta \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_{x_0} \\ t_{y_0} \\ t_{z_0} \end{bmatrix} + (1+\Delta_0)\underline{R} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

doğrusallaştırılmış fonksiyonel modeli elde edilir. Benzer denklemler tüm eşlenik noktalar için yazılır.

Başlangıç çözümü için dönüklük açılarının ve öteki parametrelerin yaklaşık değerleri sıfır kabul edilebilir ya da (7) modeline göre dengeleme ile bulunabilir. (9) modelinde geçen katsayılar bu değerler ile hesaplanır. (9) modeline dayanan dengeleme sonuçları ikinci dengeleme için yaklaşık bilinmeyen değerleri olarak kabul edilir. Düzeltmelerin (duruma göre ağırlıklı) kareleri toplamının, önceki dengeleme sonucunda bulunana eşit çıktığı adımda çözüm tamamlanır (Bleich and Ilnet, 1989). Ardışık dengeleme sayısı öncelikle yaklaşık değerlerin seçimine bağlıdır. Başlangıç değerleri sıfır ya da çok küçükse dönüklük açılarının büyüklüğü yakınsama hızını etkiler. Bu bölümde açıklanan çözüm geneldir ve dönüklük açılarının küçük olduğu durumlar için de geçerlidir.

3. SAYISAL UYGULAMA

(u, v, w) sisteminde verilen dört noktanın koordinatları bilinen (öngörülen) dönüşüm parametreleriyle (x, y, z) sistemine dönüştürülmüş ve genel çözüm modeli yardımıyla dönüşüm parametreleri yeniden hesaplanmıştır.

Eşlenik nokta koordinatları :

NN	u	v	w	x	y	z
1	5432.68	7254.12	1200.60	24208.8321	12111.9343	4182.9434
2	5354.47	5724.58	1174.57	22034.5929	12073.9091	4924.8221
3	6221.34	6355.08	1254.58	23397.0341	11919.6811	5773.1190
4	4744.72	5555.54	1381.09	21486.1187	12571.7411	4255.3935

Dönüşüm parametreleri :

$$t_x = 11000.00 \text{ m} \quad t_y = 12000.00 \text{ m} \quad t_z = 500.00 \text{ m}$$

$$(1+\Delta) = 1.5$$

$$\varepsilon = 68.00 \text{ 00 gon} , \quad \psi = 72.00 \text{ 00 gon} , \quad \omega = 34.00 \text{ 00 gon}$$

(9) modeli için gerekli yaklaşık bilinmeyen değerleri, (7) fonksiyonel modeli ile hesaplanmış ve aşağıdaki tablonun ilk sütununda gösterilmiştir. \underline{x}_i (1, 2,, 7) ardışık dengelemelerin sonuçlarıdır.

	\underline{x}_0	\underline{x}_1	\underline{x}_2	\underline{x}_3	\underline{x}_4	\underline{x}_5	\underline{x}_6	\underline{x}_7
t_x	15830.741	11027.390	11331.920	11164.795	11029.849	10998.106	11000.031	11000.000
t_y	14972.545	12103.605	13918.623	12154.336	12037.750	12002.431	11999.976	12000.000
t_z	348.977	509.783	280.603	298.812	275.039	499.010	499.970	500.000
Δ	-0.62906218	0.44006674	-0.58366592	0.37513586	0.46231292	0.49752659	0.49999431	0.50000000
ε	0.55965092	4.82525693	5.21866362	-77.7910087	-77.5986636	-77.4598429	-77.4717308	-77.4716748
ψ	1.37041794	0.64054549	1.58766117	2.26509682	1.97347829	2.00913753	2.01059574	2.01061930
ω	1.06879052	-3.31405054	-3.71087961	79.48136397	79.17455383	79.06324571	79.07394256	79.07388709

$\underline{v}^T \underline{v}$	348781.304	55.6947	7655.8800	1345.6674	1193.3384	0.3537	$7.2337 \cdot 10^{-5}$	$6.7445 \cdot 10^{-15}$
---------------------------------	------------	---------	-----------	-----------	-----------	--------	------------------------	-------------------------

Tabloda verilen dönüklük açıları radyan birimindedir. Gon birimindeki dönüklük açıları ise,

$$\varepsilon = 68.00 \text{ 000} , \quad \psi = 72.00 \text{ 000} , \quad \omega = 34.00 \text{ 000}$$

dir.

Öngörülen dönüşüm parametrelerden hesaplanan (x, y, z) sistemindeki eşlenik nokta koordinatlarının tam değerleri kullanıldığında, görüldüğü gibi $\underline{v}^T \underline{v}$ giderek sıfıra yaklaşmaktadır. Gerçek bir uygulamada ise ölçülerin hatalı olacağı düşünülürse belirli bir iterasyondan sonra $\underline{v}^T \underline{v}$ değerleri de değişmeyecektir.

(9) modelinde geçen ve oldukça karmaşık gözükken katsayılar Microsoft Excel gibi Hesap Tablosu Yazılımları ile kolayca hesaplanmakta ve art arda dengelemeler istenen doğrulukla hızlı bir şekilde gerçekleştirilebilmektedir.

4. SONUÇ

Jeodezik amaçlara yönelik, çeşitli dönüşümler (benzerlik, afin vb.) arasında en çok kullanılan dönüşüm, benzerlik dönüşümüdür. Yukarıda açıklanan üç boyutlu benzerlik dönüşümü modelinin özel durumlar için geçerli değişik biçimleri Moledensky-Badekas ve Veis modelleridir (Leick, 1990, Üstün, 1996).

Üç boyutlu benzerlik dönüşümünde parametre kestirimine ilişkin (7) fonksiyonel modeli dönüklük açılarının çok küçük olduğu varsayımına dayanmaktadır. Bir kısıtlama içermeyen genel çözüm 2.2' de açıklanmıştır. Dönüklük açılarının küçük olduğu dönüşümlerde (9) fonksiyonel modeline göre parametre kestirimi için iki dengeleme adımı yeterli olur. Dönüklük açılarının büyük olduğu dönüşümlerde yaklaşık dönüklük açıları için sıfır değerleriyle başlandığı varsayılırsa iterasyon sayısı artar. Verilen sayısal uygulamada 7. dengeleme adımında sonuca ulaşılmıştır.

KAYNAK

Bleich, V.P. und Illner, M., Strenge Lösung Der Räumlichen Koordinatentransformation Durch Iterative Berechnung, Allgemeine Vermessungs Nachrichten, Heft 4, 1989.

Deniz, R., Uydü Jeodezisi Ders Notları İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi Jeodezi ve Fotogrametri Bölümü, İstanbul 1994.

Gürkan, O., Üç Boyutta Benzeşim Dönüşümü ve Değişik Jeodezik (Elipsoid) Sistemler Arasındaki Bağlıntılar, Bilimsel Rapor No:1 K.T.Ü. Jeodezi ve Fotogrametri Bölümü, Trabzon. 1977.

Hofmann, B., Lichtenegger, H. and Collins, J., GPS Theory and Practice, Springer-Verlag Wien New York 1992.

Kılıçoğlu, A., Jeodezide Dönüşümler, Yüksek lisans tezi İ.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü, 1995.

Leick, A., GPS Satellite Surveying A Wiley-Interscience Publication John Wiley & Sons
1990.

Şimşek, M., Uydu Tekniklerinin Ağ Sıklaştırmasında Kullanılabilirliği Üzerine Bir
Araştırma, Doktora Tezi, Y.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 1995.

Üstün, A., Datum Dönüşümleri, Yüksek Lisans Tezi, Y.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü,
İstanbul, 1996.