

Orhan KURT*
Haluk KONAK**
Aslan DİLAVER***

ÖZET

Jeodezik ağlar günümüzde; hızlı, ekonomik ve yüksek doğruluklu GPS (Global Positioning System) ölçüleri ile değerlendirilmektedir. Bu durumun bir sonucu olarak; uygulamalarda GPS ağları planlanırken, yalnızca ölçülerin doğruluklarına önem verilmekte, çoğunlukla ağ güvenilirlik yönünden tam anlamıyla irdelenmemektedir.

Bu çalışmada; gerçek bir GPS ağı sayısal uygulama modeli olarak seçilmiştir. Örnek ağda, ilk adımda bir duyarlık ve güven optimizasyonu gerçekleştirilmiştir. İkinci adımda, ağ maliyet yönünden irdelenmekte ve uygulayıcılara kullanılabilir bir yöntem önerilmektedir.

1 GİRİŞ

GPS gözlemlerinin her türlü hava koşullarında yapılabilmesi, ölçmecinin yapacağı hataları azaltan bir ölçme sistemine sahip olması, klasik ölçmelere nazaran daha hızlı ve daha duyarlı sonuçların elde edilmesi nedeniyle jeodezik ağ ve deformasyon ölçmeleri için gelişmiş bir teknolojidir. GPS ölçüleri esas alınarak oluşturulan jeodezik ağlar bağıl konum koordinatları $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)_{WGS84}$ (World Geodetic System, 1984) ile değerlendirilirler.

Oluşturulan jeodezik ağa bir işletme gözüyle bakılırsa klasik ağlarda olduğu gibi GPS bağıl konum koordinatlarının optimizasyonu problemiyle karşılaşılır. GPS ağlarının optimizasyonu bir amaç fonksiyonu seçilerek; ele alınan jeodezik ağda en uygun gözlem planının (bağıl konum koordinatlarının ağ içerisindeki en uygun dağılımının) belirlenmesi, hangi uydulardan yararlanılacağı ve hangi epokta gözlem yapılacağına saptanması ve aynı zamanda ölçü sürelerinin bir fonksiyonu anlamına gelen en uygun ağırlık dağılımının belirlenmesi olarak ele alınabilir. Bu durum GPS'de yapılabilecek en genel anlamlı

* Araş.Gör., Zonguldak Karaelms Üniversitesi.

** Yrd.Doç.Dr., Karadeniz Teknik Üniversitesi.

*** Doç.Dr., Karadeniz Teknik Üniversitesi.

optimizasyondur. Yani burada bağıl konum belirlemede yararlanılan bütün elemanlar optimizasyon işlemine dahil edilerek istenilen ağ için ölçme anındaki en uygun ölçme sisteminin optimizasyonu gibi düşünülebilir. En genel anlamı optimizasyonun pratikte uygulanması zordur. Pratik olmayışı kurulacak matematiksel modelin karmaşıklığının artması, epokların işlem içerisine sokulmasıyla oluşturulacak her bir epok için ölçülmesi düşünülen uydu ve alıcı arasındaki mesafenin birkaç baz için bile çok fazla olması ve bir de ağ düzeninde nokta sayısının artmasıyla bilinen optimizasyon yöntemleriyle bilgisayarlarda sınırsız bir belleğe ihtiyaç duyulmaktadır. Günümüz bilgisayar teknolojisinin çok gelişmiş olmasına rağmen bu durum ciddiyetini halen korumaktadır.

Yukarıdaki gerekçelere dayanarak GPS ağları için yapılacak optimizasyon, öncelikle ağ düzeninde ölçüler olarak ele alınan bağıl koordinatların dağılımını (şekil optimizasyonu), bunların ağırlıklarını (duyarlık optimizasyonu) ve ağıın güvenilirliğini (güven optimizasyonu) en uygun hale getirmek şekline olacaktır. Daha sonra tasarlanan ölçme planı üzerinden elde edilen duyarlıklara, uydu dağılımının ve ölçü sürelerinin bir fonksiyonu olarak ulaşılmaya çalışılır.

Ülkemizde yapılan jeodezik çalışmalarda Ulusal Nirengi Ağı noktaları sabit kabul edilerek bu koordinat değerlerine düzeltme getirilmez (statik değerlendirme yöntemi). Dayanak noktaları olarak kullanılacak bir ağ planlanırken noktaların konumları topoğrafik yapıya, trafik işleyişine, yerleşim birimlerinin konumuna ve ağdan beklenen amaca uygun olarak belirlendiğinden sıklaştırma amaçlı yapılacak bir optimizasyon ölçme planı ve ağırlıklar üzerine olacaktır. Deformasyon ağlarında konum optimizasyonu da yapılabileceği gibi topoğrafik yapı ve tasarlanan noktaların sağlam zemine düşme gereği gibi kısıtlamalar düşünüldüğünde sıklaştırma amaçlı ağlardaki gerekçeler bu ağlarda da söz konusudur. Eğer şartlar uygunsa konum optimizasyonunun yapılması şüphesiz ağıın sağlığı açısından yararlı olacaktır. Bu çalışmada, bir ağdan beklenen duyarlık isteklerini içeren ölçüt matrisleri ile ağırlık optimizasyonu gerçekleştirilmiştir. Aynı zamanda ölçme planının da en uygun durumda belirlendiği bu optimizasyon işlemi sonucunda, ağ maliyet yönünden bir kez daha gözden geçirilmektedir. Son adımda ulaşılan sonuçlar irdelenmekte ve uygulayıcılara kullanılabilir bir yöntem önerilmektedir [6].

2 GPS İLE NOKTA KONUM BİLGİLERİNİN ELDE EDİLMESİ

GPS gözlemleri, uydudan yayımlanan sinyalin geçtiği yol boyunca geçirdiği sürenin ölçülmesinin ile ya da alınan sinyal ile alıcıda üretilen aynı özellikli sinyalin karşılaştırılması ile oluşturulan faz farklarının ölçülmesi ile elde edilirler. Burada biri uyduda diğeri alıcıda olan iki saat vardır. Uydu ve alıcı saatlerinin kayıklıkları ilk ölçüler hatalıdır ve bu ölçüler psoydu uzunluklar olarak adlandırılır [2].

Kod Psoydo Uzunluk Ölçüleri (Code Pseudoranges), $R_R^S(t)$ ölçülen kod psoido uzunluk, $\rho_R^S(t)$ uydusu ile alıcı arasındaki geometrik uzunluk; $\delta^S(t)$, $\delta_R(t)$ sırasıyla uydusu ve alıcı saat hataları, Δ_{ion} , Δ_{trop} sırasıyla iyonosferik ve troposferik refraksiyonun etkileri ve c ışık hızı olmak üzere; ölçüler ile bilinmeyenler arasındaki fonksiyonel ilişki aşağıdaki gibi kurulur.

$$R_R^S(t) = \rho_R^S(t) + c \left[\delta^S(t) - \delta_R(t) \right] + \Delta_{ion} + \Delta_{trop} \quad (1)$$

Kod ölçüleriyle elde edilen uzunlukların duyarlılığı kullanılan dalga boyunun (ya da ip uzunluğunun) %1'i kadardır. Kaba kod (C/A-Cod) için 3m, duyarlı kod (P-Cod) için 0.3m'dir. Son yıllardaki gelişmeler kod ölçüsü için duyarlılığın dalga boyu uzunluğunun % 0.1 civarında elde edileceğini göstermiştir.

Faz Psoydo Uzunluk Ölçüleri (Phase Pseudoranges), $\Phi_R^S(t)$ faz psoido uzunluk ölçüsü, λ ölçü dalgasının dalga boyu ve $N_R^S(t_0)$ t_0 anındaki tamsayı bilinmeyeni olmak üzere; herhangi bir t anı için faz denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\lambda \Phi_R^S(t) = \rho_R^S(t) + N_R^S(t_0) + c \left[\delta^S(t) - \delta_R(t) \right] - \Delta_{ion} + \Delta_{trop} \quad (2)$$

Faz ölçüleri milimetreye karşılık gelen 0.01 sayıdan daha iyi bir duyarlılıkla elde edilir. Faz ölçüleri, kod ölçülerine göre daha duyarlı elde edildiği ve daha yaygın olarak kullanıldığı için çalışmada faz ölçüleri esas alınmıştır [2].

GPS ile konum belirleme; ya noktaların mutlak, yani dünya merkezli koordinatların $(X, Y, Z)_{WGS84}$ ya da sabit bir noktaya göre diğer noktaların koordinatlarının belirlendiği bağıl konum koordinatların $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)_{WGS84}$ elde edilmesi temeline dayanır. Mutlak konum koordinatları metre civarında duyarlılıklarda olup genellikle navigasyon amaçlı kullanılmaktadır. Bir noktanın sabit alınarak diğer bir başka noktanın koordinatlarının sabit noktaya göre belirlendiği, cm ve mm duyarlılığı ölçülerin elde edildiği bağıl konum belirleme yönteminin jeodeziciler için önemi büyüktür. Duyarlılığı sonuçlar elde edilmesi nedeniyle jeodezik amaçlı ağırlar bağıl konum koordinatlarıyla oluşturulurlar.

Bağıl konum belirleme, koordinatları sabit alınan bir noktadan yararlanarak bilinmeyen nokta koordinatlarının hesaplamasıdır. Bir başka deyişle bağıl konum belirlemenin amacı iki nokta arasındaki baz vektörünü hesaplamaktır. Bilinen nokta A , bilinmeyen nokta B ve baz vektörü \underline{b}_{AB} 'yi göstermek üzere \underline{X}_A vektörüne göre \underline{X}_B vektörü \underline{b}_{AB} ,

$$\underline{X}_B = \underline{X}_A + \underline{b}_{AB} \quad (3)$$

$$\underline{b}_{AB} = \begin{bmatrix} X_B - X_A \\ Y_B - Y_A \\ Z_B - Z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X_{AB} \\ \Delta Y_{AB} \\ \Delta Z_{AB} \end{bmatrix}$$

ilişkisiyle tanımlanır. Bilinen nokta koordinatları WGS84 koordinat sisteminde ve genellikle kod ölçülerinin çözümüyle yaklaşık olarak elde edilir. Kabaca 50 m civarındaki doğruluk bilinen olarak alınan nokta için yeterlidir.

A ve B noktalarında j ve k gibi iki uyduya yapılan eş zamanlı gözlemlerle, bir kez fark alınmış (Single-Difference, SD), iki kez fark alınmış (Double-Differences, DD) ve üç kez fark alınmış (Triple-Differences, TD) gözlemler şeklinde ölçülerin lineer kombinasyonları olarak düşünülebilir. Bir çok ölçü sonrası değerlendirme işlemlerinde (postprocessing) bu ölçü kombinasyonları kullanır [2].

Çalışmada, TD matematik modeli örnek olarak seçilmiştir. TD matematik modeli içerisinde, yalnızca konum ile ilgili bilinmeyenler kalmıştır. Diğer etkiler fark alarak ihmal edilecek kadar küçülmüş ya da tamamen ortadan kalkmıştır. Faz ölçü kombinasyonu $\Phi_{AB}^{jk}(t_{12})$ ve koordinatların fonksiyonu $\rho_{AB}^{jk}(t_{12})$ ile oluşturulan fonksiyonel model,

$$\lambda \Phi_{AB}^{jk}(t_{12}) = \rho_{AB}^{jk}(t_{12}) \quad (4)$$

doğrusallaştırılır, A noktası referans olarak kabul edilip $\delta X_A = \delta Y_A = \delta Z_A = 0$ alınrsa bir tek TD için bilinmeyen sayısı altıdan üçe indirgenerek B noktasının koordinatları A noktasına göre hesaplanmış olur [6].

$$\underline{\delta X} = \underline{\delta X}_B = \begin{bmatrix} \delta X_B \\ \delta Y_B \\ \delta Z_B \end{bmatrix} \equiv \underline{\delta X}_{AB} = \begin{bmatrix} \delta \Delta X_{AB} \\ \delta \Delta Y_{AB} \\ \delta \Delta Z_{AB} \end{bmatrix} \quad \text{Dengeleme Bilinmeyenleri} \quad (5)$$

$$\ell_\phi + v_\phi = A_\phi \underline{\delta X} \quad \text{Fonksiyonel model} \quad (6)$$

İki değişik korelasyon vardır, 1) fiziksel ve 2) matematiksel korelasyon. Bir uydudan aynı anda iki noktada alınan faz ölçüleri, örneğin $\Phi_A^j(t)$ ve $\Phi_B^j(t)$ aynı uydulla ilgili oldukları için fiziksel olarak korelasyonludur. Genellikle fiziksel korelasyon göz ardı edilir ve sadece fark alma ile oluşan matematiksel korelasyon oluşturulur. v_ϕ , faz ölçü hatalarının, umut değeri sıfır ve varyansı σ^2 olan normal dağılımlı değişkenler oldukları kabulü yapılırsa,

kabulü yapılırsa, faz ölçüleri lineer bağımsız ve korelasyonsuz olurlar. Σ_ϕ , faz ölçülerinin varyans-kovaryans matrisi ve \underline{I} , birim matrisdir.

$$\underline{v}_\phi \sim N(0, \sigma^2) \quad (7)$$

$$\Sigma_\phi = \sigma^2 \underline{I} \quad (8)$$

Fark alınarak oluşturulan faz kombinasyonlarının varyans-kovaryans matrisleri, bunları oluşturan fonksiyonel modelin matris vektör formunda yazılıp, ilk faz ölçülerinin varyans-kovaryansları yardımı ile genel hata yayılma kuralı ile elde edilirler. Ağırlık matrisi varyans-kovaryans matrislerini tersi ile elde edilir. TD ile oluşturulan ölçü kombinasyonlarının ağırlık matrisi, TD ölçü kombinasyonlarını oluşturan \underline{C} matrisi ve faz ölçülerinin toplandığı vektör $\underline{\Phi}$ yardımı ile aşağıdaki gibi elde edilir [2].

$$\underline{TD} = \underline{C} \underline{\Phi}$$

$$\Sigma_{TD} = \underline{C} \Sigma_\phi \underline{C}^T = \sigma^2 \underline{C} \underline{C}^T \quad (9)$$

$$\underline{P}_{TD} = \Sigma_{TD}^{-1} \quad (10)$$

(6) ve (10) denklemleri ile matematik model

$$\underline{\ell}_\phi + \underline{v}_\phi = \underline{A}_\phi \delta \underline{X} \quad \underline{P}_\phi = \underline{P}_{TD} \quad \text{Matematik model} \quad (11)$$

şeklinde kurulur. Matematik model E.K.K. İlkesine göre çözümler

$$\underline{v}_\phi^T \underline{P}_\phi \underline{v}_\phi = \min \quad \text{Enküçük Kareler İlkesi} \quad (12)$$

$$\delta \underline{X} = (\underline{A}_\phi^T \underline{P}_\phi \underline{A}_\phi)^{-1} \underline{A}_\phi^T \underline{P}_\phi \underline{\ell}_\phi \quad \text{Dengeleme Bilinmeyenleri} \quad (13)$$

$$\underline{X}_B = \underline{X}_B^0 + \delta \underline{X} \quad \text{B Noktasının A'ya Göre Kesin Koordinatları} \quad (14)$$

B noktasının koordinatları A'ya göre belirlenmiş olur. Burada dengeleme sonucu elde edilen koordinat bilinmeyenleri, iki noktanın bağıl konum koordinatlarının da koordinat bilinmeyenlerine eşdeğerdir. Bundan dolayı elde edilen B noktasının koordinat bilinmeyenlerine ve bunlardan elde edilen stokastik bilgilere, A ve B noktaları arasındaki bağıl koordinat bilinmeyenleri ve stokastik bilgileri olarak bakılabilir.

$$\underline{\Delta X}_{AB} = \underline{X}_B - \underline{X}_A = \underline{X}_B^0 - \underline{X}_A + \delta \underline{X} \quad \text{A ve B Noktalarının Koordinat Farklarının Kesin Değeri} \quad (15)$$

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{\mathbf{v}_\Phi^T \mathbf{P}_\Phi \mathbf{v}_\Phi}{n_\Phi - 3}} \quad \text{Birim Ölçünün Ortalama Hatası} \quad (16)$$

$$\underline{Q}_{\Delta X} = (\underline{A}_\Phi^T \mathbf{P}_\Phi \underline{A}_\Phi)^{-1} = \begin{bmatrix} q_{\Delta X \Delta X} & q_{\Delta X \Delta Y} & q_{\Delta X \Delta Z} \\ q_{\Delta Y \Delta X} & q_{\Delta Y \Delta Y} & q_{\Delta Y \Delta Z} \\ q_{\Delta Z \Delta X} & q_{\Delta Z \Delta Y} & q_{\Delta Z \Delta Z} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\text{RDOP} = \sqrt{\text{iz}(\underline{Q}_{\Delta X})} = \sqrt{q_{\Delta X \Delta X} + q_{\Delta Y \Delta Y} + q_{\Delta Z \Delta Z}} \quad (18)$$

$$m_{\Delta P} = \pm m_0 \text{RDOP} = \sqrt{m_{\Delta X}^2 + m_{\Delta Y}^2 + m_{\Delta Z}^2} \quad \text{A ve B Noktalarının Bağlı Konum Duyarlıkları} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} m_{\Delta X} &= \pm m_0 \sqrt{q_{\Delta X \Delta X}} \\ m_{\Delta Y} &= \pm m_0 \sqrt{q_{\Delta Y \Delta Y}} \\ m_{\Delta Z} &= \pm m_0 \sqrt{q_{\Delta Z \Delta Z}} \end{aligned} \quad \text{Koordinat Farklarını Duyarlılığı} \quad (20)$$

n_Φ , fonksiyonel modeldeki TD sayısıdır. Burada elde edilen \mathbf{v}_Φ düzeltmeleri, ilk bağımsız faz ölçü düzeltmeleri değil, bunların lineer kombinasyonu sonucu oluşturulmuş TD modeline ait düzeltmelerdir. TD eşitlikleri ile oluşturulan matematik modelin çözülmesi sonucu bazlara ait dengeli koordinat farkları ile bunların duyarlıkları elde edilir. Tek bir baz için matematik model (21)'deki gibidir [2,6].

$$\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}_{ik} + \begin{bmatrix} v_{\Delta X} \\ v_{\Delta Y} \\ v_{\Delta Z} \end{bmatrix}_{ik} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix} \quad \underline{P}_{ik} = \begin{bmatrix} m_{\Delta X \Delta X} & m_{\Delta X \Delta Y} & m_{\Delta X \Delta Z} \\ m_{\Delta Y \Delta X} & m_{\Delta Y \Delta Y} & m_{\Delta Y \Delta Z} \\ m_{\Delta Z \Delta X} & m_{\Delta Z \Delta Y} & m_{\Delta Z \Delta Z} \end{bmatrix}^{-1} \quad (21)$$

Yukarıda elde edilen bağımlı konum koordinatları ölçüler olarak ele alınıp; bütün nokta koordinatlarının bilinmeyen olarak seçildiği tüm iz minimum koşulu altında değerlendirilirse, ağ için en uygun datum da belirlenmiş olur.

$$\underline{v}_\Delta = \underline{A}_\Delta \delta \underline{X} - \underline{\ell}_\Delta \quad \underline{P}_\Delta = \underline{K}_\Delta^{-1} \quad \text{Matematik Model} \quad (22)$$

$$\underline{v}_\Delta^T \underline{P}_\Delta \underline{v}_\Delta + \delta \underline{X}^T \delta \underline{X} = \min \quad (23)$$

$$\delta \underline{X}_\Delta = (\underline{A}_\Delta^T \underline{P}_\Delta \underline{A}_\Delta)^+ \underline{A}_\Delta^T \underline{P}_\Delta \underline{\ell}_\Delta \quad \text{Dengeleme Bilinmeyenleri} \quad (24)$$

$$\underline{X} = \underline{X}^0 + \delta \underline{X}_\Delta \quad \text{Noktaların Dengeli Koordinatları} \quad (25)$$

$$\underline{v}_\Delta = \underline{A}_\Delta \delta \underline{X}_\Delta - \underline{\ell}_\Delta \quad \text{Düzeltilmeler} \quad (26)$$

$$\underline{Q}_X = (\underline{A}_\Delta^T \underline{P}_\Delta \underline{A}_\Delta)^+ \quad \text{Dengeli Koordinatların Ters Ağırlıkları} \quad (27)$$

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{\underline{v}_\Delta^T \underline{P}_\Delta \underline{v}_\Delta}{n_\Delta - u_\Delta + d_\Delta}} \quad \text{Birim Ölçünün Ortalama Hatası} \quad (28)$$

$$\underline{K}_X = m_0^2 \underline{Q}_X \quad \text{Dengeli Koordinatların} \quad (29)$$

$$\overline{\underline{\Delta X}} = \underline{\Delta X} + \underline{v}_\Delta \quad \text{Varyans-Kovaryans Matrisi} \quad (30)$$

$$\underline{Q}_\Delta = \underline{A}_\Delta \underline{Q}_X \underline{A}_\Delta^T \quad \text{Dengeli Ölçülerinin Ters Ağırlıkları} \quad (31)$$

$$\underline{K}_\Delta = m_0^2 \underline{Q}_\Delta \quad \text{Dengeli Ölçülerin Varyans-Kovaryans} \quad (32)$$

Matrisi

Burada; p, nokta sayısı; n_Δ , ölçü (koordinat farkı) sayısı; $u_\Delta = 3p$ koordinat bilinmeyenlerinin sayısı; d_Δ , datum parametrelerinin sayısıdır. Bağlı koordinatlarla oluşturulan üç boyutlu jeodezik ağlarda datum parametrelerinin sayısı $d_\Delta = 3$ 'dür ve öteleme elemanlarına karşılık gelir.

3 GPS AĞLARINDA DUYARLIK VE GÜVEN OPTİMİZASYONU

Optimizasyon işleminin amacı; tasarlanan ölçme planına ilişkin verileri, henüz arazide tesis ve ölçüm işlemleri yapmadan , ağ noktalarının yaklaşık koordinatlarından yararlanarak simülasyon yöntemi ile üretmek, en uygun ölçme planı ve ağırlık dağılımını belirlemek, tasarlanan ağı geliştirmek ve iyileştirmektir [5].

En uygun ağırlık dağılımı II. derece optimizasyonun konusudur. Ölçü ağırlıkları belirlenirken fiziksel anlamı olmayan ağırlıklara karşılık gelen ölçüler ölçme planından çıkarılır. Böylece ölçme planı da tasarlanmış olur. Çözüm yöntemi olarak ölçüt matrislerin tersine direkt yaklaşım olan U,m çözüm yöntemi seçilmiştir.

U,m çözümü , ölçüt matrisleri ile ağırlık optimizasyonu işlemine uygun, kararlı ve sağlam bir yöntem olup, her durumda çözüm olanağı vermektedir. Ayrıca ağırlık optimizasyonu işleminde, ölçme planından kaynaklanan şekil belirsizlikleri (şekil defekleri) kolayca saptanabilmekte ve buna uygun çözüm algoritması geliştirme olanağı sağlamaktadır. Uygun ölçüt matrisleriyle çalışılması durumunda; duyarlık optimizasyonu için yapılan irdelemeler, U,m çözümünün üstünlüğünü göstermektedir. Çalışmada U,m çözümü esas alınan ikinci derece optimizasyon işlemi adım adım anlatılacaktır [4,5].

* İstenilen duyarlık isteklerini yansıtan ölçüt matrisi (\underline{D}_X), noktalar arası uzaklığın bir fonksiyonu şeklinde türetilen, enine ve boyuna korelasyon değerleri yardımı ile oluşturulur [5,6].

* Noktaların yaklaşık koordinatları varsa WGS84’de elde edilir. Yok ise noktaların yaklaşık koordinatları Türkiye Ulusal Jeodezik Datum’da (TUJD) herhangi bir yolla belirlenir. Daha sonra TUJD’dan WGS84’e dönüşüm yapılır [8].

$$(x, y, H)_{TUJD} \rightarrow (B, L, h = H+N)_{TUJD} \rightarrow (X, Y, Z)_{TUJD} \rightarrow (X, Y, Z)_{WGS84}$$

* Noktaların WGS84’deki yaklaşık koordinatları yardımı ile ortogonal özellikli ($\underline{G}^T \underline{G} = \underline{I}$) datum parametrelerinin katsayılar matrisi oluşturulur. Ağ bağıl koordinat ölçüleri esas alınarak oluşturulacağından, ağda öteleme parametreleri belirsiz kalır. \underline{G} matrisi ötelemeye karşılık gelen sütunlarla oluşturulur. \underline{G} matrisi yardımı ile \underline{S} dönüşüm matrisi elde edilir [7].

$$\underline{S} = \underline{I} - \underline{G} \underline{G}^T \quad \text{Differansiyel Anlamda Dönüşüm Matrisi} \quad (33)$$

* Elde edilen ölçüt matrisi \underline{S} dönüşüm matrisi yardımı ile (WGS84’te seçilmiş) serbest ağ datumuna dönüştürülür.

$$\begin{aligned} \underline{C}_X &= \underline{S} \underline{D}_X \underline{S}^T & \text{Datumla Dönüştürülmüş Ölçüt Matrisi} \\ \underline{Q}_X &= \frac{1}{\sigma_0^2} \underline{C}_X \end{aligned} \quad (34)$$

Optimizasyon işlemi tüm iz minimum koşulu altında, U_m çözümü kullanılarak gerçekleştirilecek bir ağırlık optimizasyon işleminde, elde edilen ağırlıklar tüm iz minimum koşullarına göre uygulanan bir datum dönüşümünden (\underline{S} dönüşümünden) bağımsızdır ve $\underline{C}_X = \underline{D}_X$ olacak şekilde özdeş olarak alınabilir [6].

*Ele alınan sıklaştırma amaçlı ağda, doğrudan komşu olan noktalar ile bunları çevreleyen diğer noktalara olmak üzere bir GPS ölçme planı tasarlanır. Planlanacak ağda $S_i \leq 20$ km’den küçük olan bütün bazlar ölçü planına eklenerek \underline{A}_Δ şekil matrisi oluşturulur.

* İkinci derece optimizasyonun temel eşitliği,

$$\underline{A}_\Delta^T \underline{P}_\Delta \underline{A}_\Delta = \underline{Q}_X^+ \quad (35)$$

U_m çözümünün doğrusal denklem takımına dönüştürülür. Ölçülerin korelasyonsuz olduğu öngörüsü ile ağırlık matrisi \underline{P}_Δ köşegen matris olarak elde edilir (“O”; Khatri-Rao Çarpımı).

$$(\underline{A}_\Delta^T \odot \underline{A}_\Delta^T) \underline{p}_\Delta \doteq \underline{q} \quad (36)$$

$$\underline{p}_\Delta = \text{köşegen } (\underline{P}_\Delta) \quad , \quad \underline{q} = \text{vektör } (\underline{Q}_X^+)$$

U,m doğrusal denklem takımı için En Küçük Kareler ilkesine göre, ağırlıkların kareleri toplamının da minimum ($\underline{p}_\Delta^T \underline{p}_\Delta \Rightarrow \min$) yapıldığı bir çözüm yöntemi kullanılarak \underline{p}_Δ ağırlık vektörü belirlenir ("*", Hadamart çarpımı) [1,3,4,5,6]

$$\underline{p}_\Delta = (\underline{A}_\Delta \underline{A}_\Delta^T * \underline{A}_\Delta \underline{A}_\Delta^T)^{-1} (\underline{A}_\Delta^T \odot \underline{A}_\Delta^T)^T \underline{q} \quad (37)$$

* $p_{\Delta_i} \leq 0$ ($i = 1,2,\dots,n$) olan ağırlıklara karşılık gelen ölçüler fiziksel olarak anlamlı olmadığından, ölçü planından çıkarılır.

* U,m çözümünde $\underline{d}^T \underline{d}$ global ölçütü diğer çözüm yöntemlerine göre büyük çıktığından, ağırlıklar $\underline{d}^T \underline{d} \Rightarrow \min$ amaç fonksiyonu seçilerek (39) eşitliğine göre kestirilen bir λ ölçek katsayısıyla lineer olarak dönüştürülürler ($\underline{p}_\Delta = \lambda \underline{p}_\Delta$).

$$\underline{D} = (\underline{A}_\Delta^T \underline{P}_\Delta \underline{A}_\Delta)^+ - \underline{Q}_X \quad , \quad \underline{d} = \text{vektör } (\underline{D}) \quad (38)$$

$$\lambda = \frac{\text{iz}[(\underline{A}_\Delta^T \underline{P}_\Delta \underline{A}_\Delta)^+ (\underline{A}_\Delta^T \underline{P}_\Delta \underline{A}_\Delta)^+]}{\text{iz}[(\underline{A}_\Delta^T \underline{P}_\Delta \underline{A}_\Delta)^+ \underline{Q}_X]} \quad (39)$$

* Yukarıdaki işlemlere $\underline{p}_{\Delta_i} > 0$ ($i = 1,2,\dots,n$) olana kadar devam edilir.

* Elde edilen ağırlık vektörü yalnızca ağı oluşturulan noktalar arasındaki ağırlık dağılımını gösterir. Ağırlıklar, seçilen ortalama bir ağırlığa göre normlandırılır. Planlanacak ağda, kullanılacak alıcıların özelliklerine göre, arazinin belirgin atmosferik koşulları da göz önünde bulundurularak birim ölçünün karesel ortalama hatası σ_0 kestirilebilir.

- σ_0 değeri kullanılarak koordinat farkı ölçülerinin ulaşılabilecek duyarlıkları normlandırılmış ağırlıklar yardımı ile elde edilebilir.

$$\text{köşegen } (\underline{P}_\Delta) = \underline{p}_\Delta$$

$$\Sigma_\Delta = \sigma_0^2 \underline{P}_\Delta^{-1} = \sigma_0^2 \underline{Q}_\Delta \quad (40)$$

* Σ_Δ ağıın tamamı için ulaşılan varyans-kovaryans matrisini; her bir baz ölçüsü yapılan nokta çiftlerine karşılık gelen 3×3 boyutlu köşegen alt matrisler halinde düzenlenerek, bağıl konum koordinatlarının elde edilen duyarlıkları aşağıdaki gibi oluşturulur

$$\Sigma_{\Delta_{i,j}} = \begin{bmatrix} \sigma_{\Delta X \Delta X} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\Delta Y \Delta Y} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\Delta Z \Delta Z} \end{bmatrix} \quad i,j \text{ Kenarına Ait Varyans-Kovaryans Matrisi} \quad (41)$$

*Ele alınan jeodezik ağ, güven ve maliyet yönünden bir kez daha gözden geçirilerek tesis ve ölçüm işlemlerine başlanılır. İndirgenmiş ölçme planına göre ağın uygun yerlerinde GPS gözlemleri için oturumlar planlanır. Ulaşılan duyarlıkları sağlayacak şekilde ölçme işlemleri gerçekleştirilir [6].

*Her bir baz için ölçü yapılması tasarlanan zaman içerisinde mümkün olan bütün epoklar için geçerli ölçüm şartının (yükseklik açısı $> 15^\circ$) sağlandığı, görünen bütün uydular baz ile uydular arasında oluşturulacak düşünsel ağa dahil edilir. Oluşturulan bu ağ, simülasyonla ağ indirgemesi yöntemine göre skaler (RDOP) ya da ölçüt matrisi olarak seçilecek olan (41)'e yaklaştırılmaya çalışılır. Bu işlem şöyle gerçekleştirilebilir. \underline{P}_Φ , kullanılan faz kombinasyon modeline göre kurulduğu için bilinmektedir. Geriye kalan \underline{A}_Φ uydu dağılımına bağlıdır. Belirli ölçü süresi aralıklarında, uydu dağılım bilgileri almanak dosyaları kullanılarak elde edilir. $\underline{A}_\Phi^{(k)}$, k'nci ölçü grubu için oluşturulan şekil matrisi olmak üzere, n parçaya ayrılan ölçüm yapılacak süre aralığı için $\underline{\delta q}^T \underline{\delta q}^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) hesaplanır.

$$\underline{\delta q}^{(k)} = \text{vektör} \left[(\underline{A}_\Phi \underline{P}_\Phi \underline{A}_\Phi)^{-1}_{ij} - \frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma_{\Delta_{i,j}} \right] \quad (42)$$

$$\underline{\delta q}^T \underline{\delta q}^{(k)} = \min \quad (43)$$

olan çözüm o baz için en uygun uydu dağılımını gösterir. Çalışmada bu kısım incelenmemiştir. Ancak önerilebilecek bir yöntem olarak tartışılmıştır.

4 SAYISAL UYGULAMA

4.1 Trabzon GPS Ağının Tanıtılması

Tapu ve Kadastro Bölge Müdürlüğü sınırları içerisinde bulunan ve yerel ağların ülke yüzey ağına bağlanabilmesi amacı ile oluşturulan ana nirengi ağı, örnek GPS ağı olarak seçilmiştir. 2000 km²'lik alanı kapsayan ve toplam 26 noktadan oluşan söz konusu GPS ağında, statik konum belirleme yöntemine göre 47 adet GPS baz ölçüsü yapılmış ve ağ topluca değerlendirilmiştir. Örnek olarak ele alınan GPS ağı, bu özelliklerinin bir sonucu, Trabzon GPS Ağı olarak adlandırılmıştır.

Trabzon GPS Ağı'nın datumu ve noktalarının yaklaşık yerleri bellidir. Başka bir deyişle ağ noktalarının koordinatları, zorlamasız bir yöntemle yaklaşık olarak belirlenmiştir. Bu anlamda ele alınan ağ için gerçekleştirilecek ikinci derece optimizasyon işlemi sonucunda, ağda beklenen duyarlık isteklerinin karşılanamaması durumunda, ağa yeni ölçüler ve yeni noktalar katılarak III.Derece Optimizasyon işlemi uygulanabilir.

4.2 Trabzon GPS Ağının Duyarlık Ve Güven Ölçütleriyle İrdelenmesi

Trabzon GPS ağında yapılan GPS ölçüleri üç boyutlu olarak WGS84 datumunda topluca değerlendirilmiş, sonuçlar duyarlık ve güven yönünden irdelenmiştir. Değerlendirme işlemi için kullanılan program algoritmaları Şekil 1'de gösterilmiştir.

GPS elde edilen bu tip ağlarda aynı baza ait üç koordinat farkı ölçüsünün korelasyonsuz ve eşit ağırlıklı alınması hata elipsoidlerinin küreler şeklinde elde edilmesi için yeterlidir. Şekillerde noktalara ilişkin konum duyarlıklarının incelenebilmesi amacıyla, yalın bir gösterim olarak, hata elipsoidleri yerine hata elipsleri çizilmiştir.

Şekil 1'deki algoritma kullanılarak mevcut Trabzon GPS ağı değerlendirilmiştir. Ölçü ağırlıklar eşit olarak seçilmiş ağ sadece duyarlık ve güven yönünden bir fikir edinmek için incelenmiştir. Mevcut ağın güven yönünden uygun olduğu görülmektedir. Ağın yapısına baktığımızda sadece GPS ölçülerin değerlendirildiği bir ağda; her bir ölçü bir üçgenin kenarı olacak şekilde planlandığında ölçüler birbirleri yeterince denetledikleri, ölçülerin serbestlik derecelerinin yeterli büyüklükte olduğu, kaba hatanın koordinatlara etkime katsayısının diğer ölçütlere göre çok daha yüksek olduğu görülmektedir. Bunun sebebi kurulan fonksiyonel modelin lineer olması ve koordinat farklarının ağ içerisinde ölçüler olarak düşünülmesi; bunlarda yapılacak hatanın doğrudan koordinatlara yansıtacağını, yani bu ölçülerin ağ noktalarının koordinatlarını yeterli derecede denetlediğini göstermektedir. Ağın ölçülerin birbirlerini denetleme ölçütünün en küçük değerinin (1005-107), (1007-107) kenarlarına ait olduğu görülmektedir. Bu durum, kenarların her hangi bir üçgenin kenarı olmamasından kaynaklandığı şekilden kolayca görülmektedir. Bu durumda; ağa (107-3005) ve (1003-107) gözlemlerinin eklenmesiyle, ağ 107 noktasında güvenilirlik yönünden iyileştirilmiş olacaktır.

Burada temel sorun; ağın gerçek ölçülerle değerlendirilmesi aşamasında olası uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesi sırasında ortaya çıkacaktır. Örneğin (3001-1007-3005) ve (3001-3002-3007) üçgenleri, yeterli sayıda gözlemlerle bağlanmıştır. Bu üçgenlerdeki gözlemlerin herhangi birindeki olası hata, büyük bir olasılıkla diğer ölçülere de yayılacaktır.

Hata elipsoidlerini incelediğimizde ağın hata elipsoidlerinin uç noktalarda ağın orta noktalarındakilere göre daha büyük görülmektedir. Aradaki farka oransal olarak bakılırsa

uçlardaki hata elipsoidlerinin ağın ortalarına rastlayanlardan iki kat daha büyük olması, ağın duyarlık yönünden kötü planlandığını göstermektedir.

Ağ maliyet yönünden incelendiğinde, ortalama serbestlik derecesinin $r_0 \approx 0.50$ değeri civarında olduğu için, ağın yine maliyet yönünden de yeterli olduğuna karar verebiliriz. Yine kısmi serbestlik ölçütlerinin birbirine yakın olduğu ve r_0 'dan çok büyük serbestlik derecesine sahip ölçünün olmaması ağın maliyet yönünden iyi durumda olduğunu göstermektedir.

Özetle mevcut ağ duyarlık yönünden zayıf, güven ve maliyet yönünden iyi durumdadır. Jeodezik ağların en uygun hale getirilmesinde en önemli ölçütler duyarlık ve güvendir. Maliyetin en uygun hale getirilmesi bu aşamalar garantiye alındıktan sonra gerçekleştirilir. Maliyet göz önünde tutulurken asıl amaçtan sapılmaz. Bu gerekçelere dayanarak mevcut ağın kalitesinin artırılması, ağın beklenen istekleri karşılaması için optimizasyona tabi tutulması gereklidir.

4.3 Trabzon GPS Ağı Gözlem Planının Yeniden Tasarlanması, Duyarlık ve Güven Yönünden En Uygun Duruma Getirilmesi

GPS gözlem planının tasarımı için küçük bir yazılım kullanarak, ağda $S_i \leq 20$ km olan bütün kenarlar ölçme planına dahil edilmiştir. 26 noktadan oluşan ağda 20 km'den küçük baz sayısı 205'dir. Tasarlanan ağ Şekil 4'de gösterilmektedir

Gerçekleştirilen ağırlık optimizasyonu işlemi sonucunda, 74 GPS baz ölçüsünden oluşan bir ölçme planı elde edilmiştir. ($[dd] = 1.96$, $\lambda_{\max} = 4.62$, $\lambda_{\min} = 0.04$, $\lambda_{\max} - \lambda_{\min} = 4.58$) $[dd]$ ölçütü amaçlandığı gibi küçülmüş, $\lambda_{\max} \leq 1$ olma koşulu sağlanmamıştır. Bunun nedeni ölçüt matrisinden kaynaklanan ölçek sorunudur. Kararlı ölçüt matrisi oluşturmak halen bir sorun oluşturmaktadır. Ağırlıklar için belirlenen bir ölçek katsayısı σ_0 ile $\lambda_{\max} \leq 1$ koşulu sağlanırken global ölçüt $[dd]$ 'nin büyümeye başladığı görülür. Bu durumda eşdeğerlik testi ile eş anlamda olan $\underline{f}^T (\underline{Q}_X - \overline{\underline{Q}}_X) \underline{f} \leq 0$ (\underline{f} :Bilinmeyenlerin bir fonksiyonu) test işlemi irdelenir. Bu yaklaşım ağın datumundan bağımsızdır. Her iki ölçütten birinin sağlanması yeterlidir. Sonuç olarak; indirgenmiş ölçme planı ve ağırlık dağılımı, duyarlık ve güven yönünden yeterlidir.

Şekil 5'de planlanan ağın hesaplanan güven ölçütleri incelendiğinde 4 ölçünün $\{(1005-1007), (130-3010), (5001-2116), (3002-3003)\}$ redündan payları ve dış güven ölçütleri yeterince denetlenebilir, iç güven ölçütleri zayıf denetlenebilir olduğu görülmüştür. Bu durum ilgili kenar uzunluklarının çok kısa olmasından kaynaklanmaktadır. Buradan

çıkartılacak sonuç, ağ planlanırken kenar uzunluklarının da homojen olmasına özen gösterilmelidir.

Diğer ölçüler ise oldukça iyi denetlenmektedir. Hata elipsoidleri Trabzon GPS ağına göre birbirlerine yakın büyüklükteki küreler şeklindedir. Sonuçta ağın duyarlık ve güven yönünden yeterli düzeye ulaştığı görülür. Böylece en küçük kareler çözümü sonucunda elde edilen ağırlıkların kareleri toplamı da minimum yapılmaktadır.

Karşılaştırmalı bir irdeleme yapılmak istenirse; Ek Şekil 5'de planlanan ağın maliyeti biraz daha düşürülmek istenirse, $r_0 = 1 - u/n = 0.65$ ortalama redundanz payından çok büyük olan ölçüler gözlem planından çıkarılabilir. Şekil 6'da ağ üzerinde böyle bir örnek denenmiş, serbestlik ölçütü 0.80 den büyük olan gözlemler gözlem planından çıkarılmıştır. Trabzon GPS ağına göre daha az ölçüye sahip olan ağın uç ve orta noktalar için hesaplanmış olan hata elipsoidlerinin yarı eksenlerinin oranlarının bu ağa göre daha düşük olduğu görülmektedir. Fakat tasarlanan ağdan, eşdeğerlik testi elemanları olan λ_{\max} ve $\lambda_{\max} - \lambda_{\min}$ değerlerinin amaçlanandan daha da uzaklaştığı görülmüştür. Hata elipsoidi oranları Şekil 5'deki ağ ile hemen hen aynıdır. Güven ölçütleri yine kısa kenarlar olan yukarıdaki 4 ölçü için beklenen sınırların altına düşmüştür. Geliştirilmiş ölçme planı göz önünde bulundurularak, kesikli olarak gösterilen ölçüler ağa dahil edilerek ölçme planı değiştirilmiştir. Ağ duyarlık ve güven yönünden istenilen sınır değerlere ulaştırılmıştır.

5. SONUÇLAR

Jeodezik ağların kullanım amaçlarına göre önceden hedeflenen belirli doğruluk ve kalitede olmaları istenir. Bu amaca; uygulayıcıların bilgi, deneyim ve üst görüşü doğrultusunda ulaşılabilir. Ancak tek anlamlı bir çözüm için; amaç fonksiyonu olarak ağın tümüne ait duyarlık isteklerini yansıtan ölçüt matrisleri seçilmeli ve ele alınan ağ duyarlık ve güven yönünden en uygun duruma getirilmelidir. Böylece ağın maliyeti de kullanılan çözüm yöntemleri anlamında minimum yapılmış olur.

GPS ile jeodezik ağ oluştururken; ağ tasarımı işlemleri (gözlem eklemek, gözlem çıkarmak gibi) duyarlık optimizasyonu sonucu elde edilen plana göre yapıldığında, hata elipsoidleri hemen hemen aynı kalmakta, ağın kalitesi optimizasyon sonucu tasarlanan ağa yakın olmaktadır.

Her ölçme oturumu için elde edilen ve ölçüler olarak ele alınan GPS koordinat farkları gerçekte korelasyonludur. Bu durumda, optimizasyon sonucu ilgili gözlemlerin korelasyonlarının da kestirilmesi en uygun yaklaşım olacaktır. Ancak korelasyonlu gözlemler

için gerçekleştirilecek ağırlık optimizasyonu işlemlerinde, uygulamada fiziksel olarak mümkün olmayan sonuçlar elde edilmektedir. Bu nedenle söz konusu yaklaşım henüz kullanım olanağına kavuşmamıştır.

GPS ile oluşturulan ağlar için yukarıda sunulan öneriler doğrultusunda gerçekleştirilecek bir duyarlık ve güven optimizasyonu işlemi gerçeğe daha uygun olacaktır. Uygulamada ise optimizasyon olanaklarının çok sınırlı olduğu bilinmektedir. Bu durumda; ölçme planı tasarlanırken, özellikle doğrudan komşu noktalar ile güvenirliliği zayıf olan bağlantılar için komşu noktaları çevreleyen uygun noktalara gözlem planlanmalıdır. Öte yandan, gözlem bağlantılarının kapalı çokgenler oluşturması durumunda; çokgenler olabildiğince eşit alanlara bölünmelidir.

KAYNAKLAR

- [1] Ayan, T., Jeodezik Ağların Optimizasyonu, Doçentlik Tezi, İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi İstanbul, 1981.
- [2] Hofmann-Wellenhof, B., Lichtenegger, H. ve Collins, I., Global Positioning System Theory and Practice, İkinci Baskı, New York, 1993
- [3] Grafarend, E. W. ve Sanso, F., Optimization And Design of Geodetic Networks, Springer-Verlag, Berlin, New York, Tokyo, 1985
- [4] Konak, H., Yüzey Ağlarının Optimizasyonu , Doktora Tezi, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 1994.
- [5] Konak, H., Yer Merkezli Üç Boyutlu Yüzey Ağlarında Ağırlık Optimizasyonu, Harita ve Kadastro Mühendisliği Dergisi, 77 (1995), 20-33.
- [6] Kurt, O., GPS Ölçülerinin Değerlendirildiği Yermerkezli Üç Boyutlu Jeodezik Ağlarda Duyarlık ve Güven Optimizasyonu, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 1996.
- [7] Öztürk, E. ve Şerbetçi, M., Dengeleme Hesabı, Cilt III, K.T.Ü. Basımevi, 144, Trabzon, 1992.
- [8] Strang, G., Borre, K., Linear Algebra, Geodesy and GPS, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley (USA), 1997.

Verilerin Okutulması
 $n_p, n_{\Delta X}, n_{\Delta Y}, n_{\Delta Z}$
 $n_{\text{sabit}}, d (=3), \sigma_0$
 $DN(i), BN(j), \Delta X_{ij}, m_{\Delta X_{ij}}$
 $DN(i), BN(j), \Delta Y_{ij}, m_{\Delta Y_{ij}}$
 $DN(i), BN(j), \Delta Z_{ij}, m_{\Delta Z_{ij}}$

A_{Δ} Şekil matrisi
 $P_{\Delta} = K_{\Delta}^{-1}$ Ağırlık Matrisi
 ℓ_{Δ} Küçültülmüş Gözlemler

Normal denklemler
 $A_{\Delta}^T P_{\Delta} A_{\Delta} \delta X - A_{\Delta}^T P_{\Delta} \ell_{\Delta} = 0$

$\underline{X}_{WGS84} = \underline{X}^0_{WGS84} + \delta X$
 $\underline{v}_{\Delta} = A_{\Delta} \delta X - \ell_{\Delta}$
 $\underline{\Delta X}_{WGS84} = \underline{\Delta X}_{WGS84} + \underline{v}_{\Delta}$

Ters Ağırlık Matrisleri
 $Q_X = (A_{\Delta}^T P_{\Delta} A_{\Delta})^{-1}$
 $Q_{\Delta X} = A_{\Delta} Q_X A_{\Delta}^T$
 $Q_v = P_{\Delta}^{-1} - Q_{\Delta X}$

$w_0 = 16$ (ya da 11)
 $r_j = (Q_v P_{\Delta})_{jj}$
 $\Delta_{0j} = w_0 \sigma_0 / \{(P_{\Delta} Q_v P_{\Delta})_{jj}\}^{1/2}$
 $\delta_{0j} = \Delta_{0j} \{(P_{\Delta} Q_{\Delta X} P_{\Delta})_{jj}\}^{1/2} / \sigma_0$

Hata Elipsoidlerinin Elemanları

	Yarı Eksenler	Dönüklükler
DN	A	$\alpha_A, \beta_A, \gamma_A$
	B	$\alpha_B, \beta_B, \gamma_B$
	C	$\alpha_C, \beta_C, \gamma_C$

Nokta Konum Hataları
 $m_p^2 = A^2 + B^2 + C^2 = m_x^2 + m_y^2 + m_z^2$

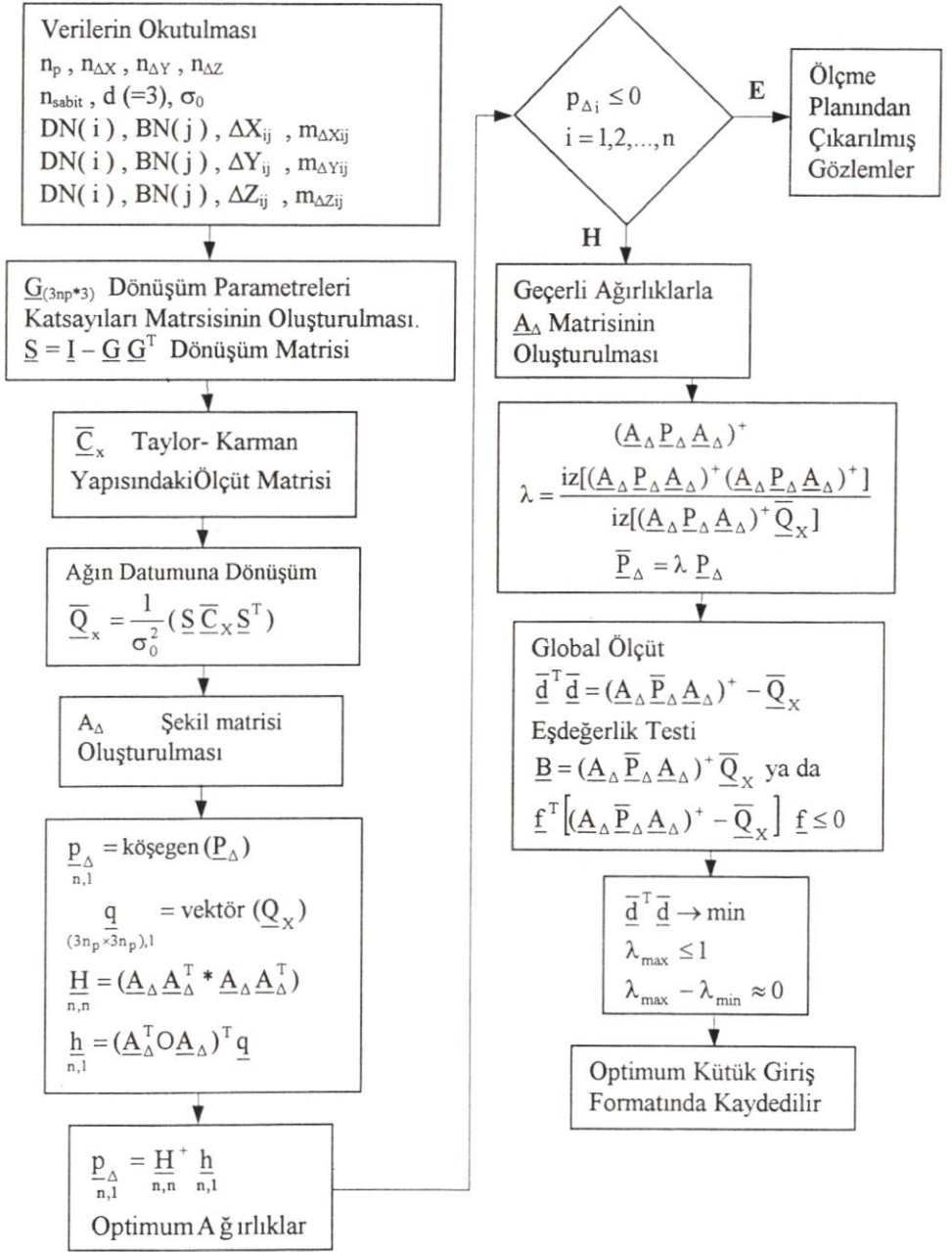
Bağıl Hata Elipsoidlerinin Elemanları

DN	BN	Yarı Eksenler	Dönüklükler
		A	$\alpha_A, \beta_A, \gamma_A$
		B	$\alpha_B, \beta_B, \gamma_B$
		C	$\alpha_C, \beta_C, \gamma_C$

n_p : Ağdaki Nokta Sayısı
 $n_{\Delta Y}$: Ağda Ölçülen ΔY sayısı
 n_{sabit} : Ağda Sabit Alınan Nokta sayısı
 d : Defekt (Datum Parametreleri) Sayısı

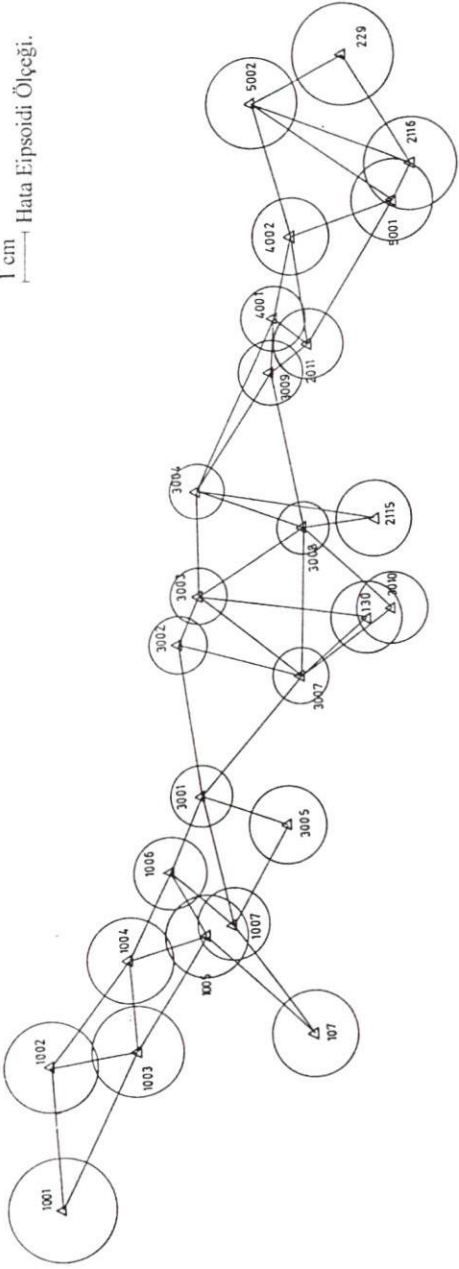
$n_{\Delta X}$: Ağda Ölçülen ΔX sayısı
 $n_{\Delta Z}$: Ağda Ölçülen ΔZ sayısı
 σ_0 : Öncül Standart Sapma
 $n = n_{\Delta X} + n_{\Delta Y} + n_{\Delta Z}$

Şekil 1. Üç Boyutlu GPS Bağıl Koordinatlarının Dengelenmesi İçin Kullanılan Algoritma.

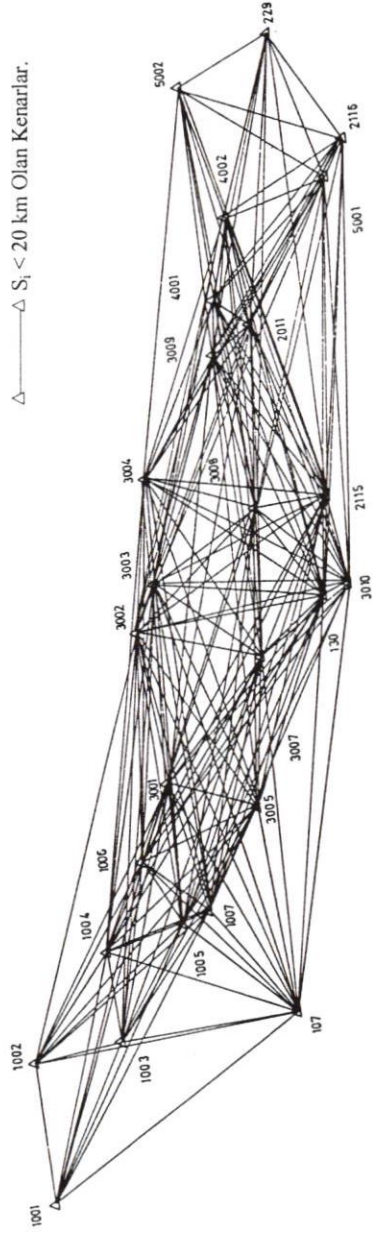


Şekil 2. U,m Yöntemi ile II.Derece Optimizasyon.

1 cm — Hata Eipsoidi Ölçeği.



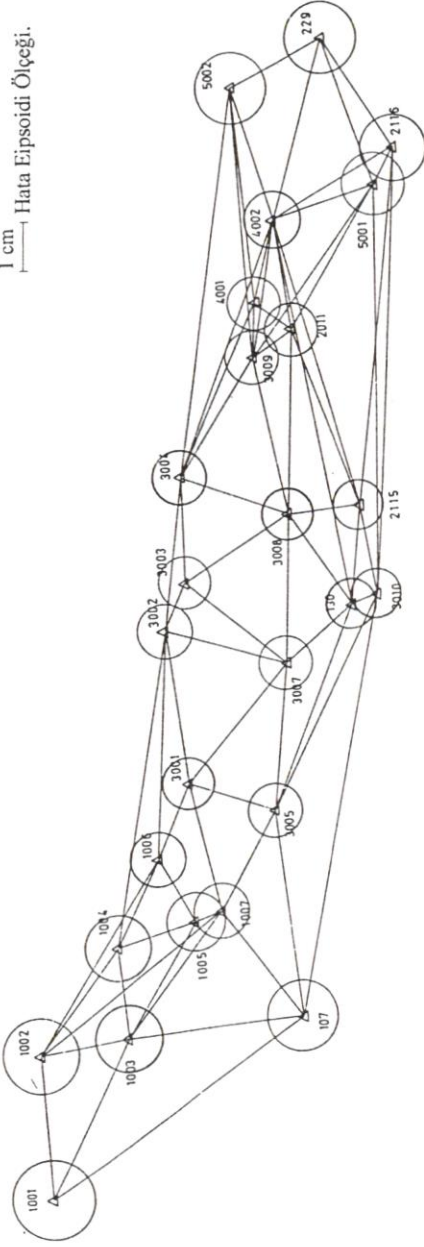
Şekil 3. Trabzon GPS Ağı.



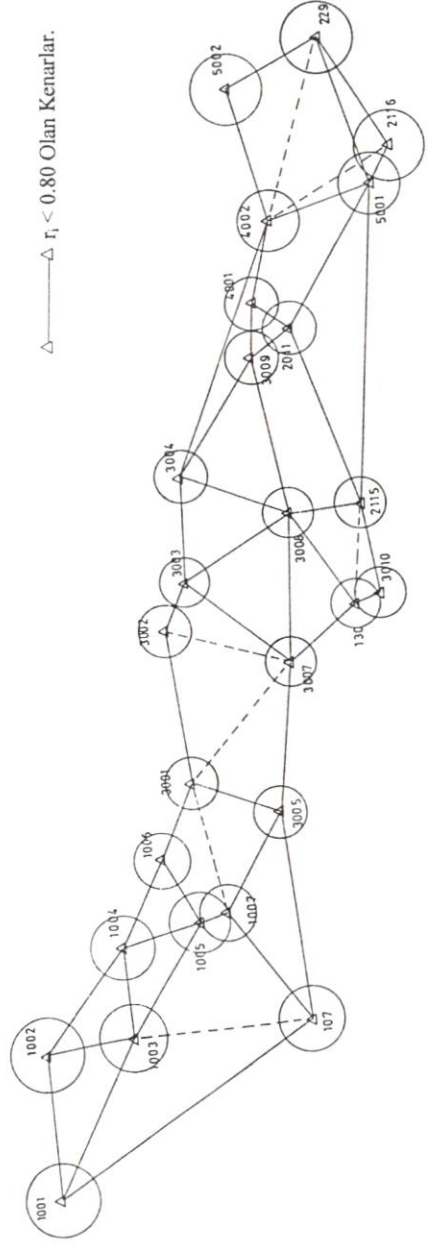
△ — $\Delta S_i < 20$ km Olan Kenarlar.

Şekil 4. Trabzon GPS Ağı'nın Yeniden Tasarlanmış Ölçme Planı.

1 cm Hata Eipsoidi Ölçeği.



Şekil 5. Ağrlık Optimizasyonu Sonucu İndirgenen Geliştirilmiş Trabzon GPS Ağı.



Şekil 6. Karşılaştırma Amaçlı Olarak Tasarlanan Trabzon GPS Ağı.