KENAR AĞLARINDA UYUŞUMSUZ ÖLÇÜLERİN KLASİK UYUŞUMSUZ ÖLÇÜ TESTLERİ VE M-KESTİRİMİ YÖNTEMİ İLE BELİRLENMESİ VE KARŞILAŞTIRILMASI

Mustafa BERBER

ÖZET

Uyuşumsuz ölçüleri belirlemek için iki temel yaklaşım vardır: Klasik uyuşumsuz ölçü testleri (Baarda'nın data-snooping, Pope'nin τ testi) ve Robust yöntemler.

En Küçük Kareler Yönteminin uyuşumsuz ölçülerin bozucu etkilerini uyuşumlular üzerine yaydığı ve uyuşumsuz ölçülere karşı duyarlı olduğu bilinmektedir. Bu yüzden bu yönteme dayalı olarak geliştirilmiş olan Baarda ve Pope testlerinin de uyuşumsuzları belirlemede, özellikle; ölçüler birden fazla uyuşumsuz içerdiği zaman, başarısız kaldığı ileri sürülmektedir. Böylesi durumlarda robust yöntemlerin uygulanması önerilmektedir. Bu tartışmalar jeodezik temel ağların bir kesimini oluşturan bir kenar ağında araştırılmıştır.

1.GİRİŞ

Jeodezide genellikle doğrultu, kenar, yükseklik farkı v.b. ölçülerden (gözlemlerden) yararlanarak bazı parametreler (koordinat bilinmeyenleri v.b.) ve bunların standart sapmaları kestirilir. Bazı ölçüler çesitli nedenlerle kaba hatalar içerebilir. En Küçük Kareler Yöntemi (EKKY), kaba hataların bozucu etkisini tüm kestirilen değerlere yayar (Hekimoğlu,1997). Dolayısıyla bu kaba hatalar (uyuşumsuz ölçüler), EKKY ile kestirilen tüm parametreleri, bunların standart sapmalarını ve birim ağırlıklı deneysel standart sapmayı bozar ve bunlarla ilgili test kararlarını yanıltır. Dolayısıyla analiz sonuçlarının güvenilir olması için bu kaba hataların tanınması ve etkisiz hale getirilmesi gerekmektedir. Ölçülerdeki kaba hataları ortaya çıkarmak için EKKY'ne dayalı klasik uyuşumsuz ölçü testleri (data-snooping, tau-testi, t-testi) uygulanır. Fakat bu yöntemler, genellikle bir anda tek uyuşumsuz ölçüyü belirlemeye uygundur (Hekimoğlu 1997). Bu yüzden birden fazla kaba hata olması halinde bu yöntemler iteratif olarak uygulanır. Bunun için belirlenen uyuşumsuz ölçü atılır ve EKK yöntemi ve uyşumsuz ölçü testleri geri kalan ölçülere yeniden uygulanır. Bu işlem uyuşumsuz ölçü kalmayıncaya kadar sürdürülür. Yani ölçü kümesindeki uyuşumsuz ölçü sayısı kadar bir iterasyon gerektirmektedir (Gao et al,1992). Ayrıca, EKK yöntemi ile uyuşumsuz ölçü belirleme, bir uyuşumsuz ölçünün ayıklanmasını izleyen hesaplama sırasında bir daha yeniden gözden geçirilmemesi sebebiyle doğru sonucu garanti edemez (Kraup et al, 1983).

Robust yöntemlerin avantajları, EKK yönteminin aksine uyuşumsuz öçülerin kestirilenler üzerindeki etkilerini yerelleştirmesi (yaymaması), dolayısıyla kestirilen bilinmeyenler üzerindeki olumsuz etkilerin azaltılması ve hatta yok edilmesi olarak sıralanabilir. Yani bu yöntem, varsayılan dağılımdan sapmalara karşı duyarlı değildir. Robust M-Kestiriminde önemli bir özellik, yinelemeli ağırlıklandırmalı EKK yöntemine göre bilinmeyenlerin çözümü sırasında verilen a piriori P ağırlık matrisinin uyşumsuz ölçülere ait olan değerlerinin yineleme aşamasında küçülmesi, hatta sıfıra gitmesidir. Bu özellik uyuşumsuz ölçülerin tanınmasını sağlar. Böylece bilinmeyenler uyuşumsuz ölçülerden en az etkilenmiş olarak belirlenmiş olur.

Genel olarak klasik uyuşumsuz ölçü testleri kullanılarak az sayıda kaba hatanın güvenilir olarak denetlenebildiği ileri sürülmektedir (Koch, 1996). Hekimoğlu (1997) 'de klasik uyuşumsuz ölçü testleri ile en çok bir kaba hatanın güvenilir olarak belirlenebileceği ileri sürülmektedir. Adıgeçen çalışmada ele alınan örnekte bilinmeyen sayısı 4 dür. Acaba bilinmeyen sayısı konum ağlarında olduğu gibi daha büyük olduğunda bu iddianın geçerliliği ve ayrıca Robust M-Kestirim yöntemlerinin de uygulanabilirliği araştırılmak istenmiştir.

2.MATEMATİKSEL MODEL VE DENGELEME SONUÇLARI

Dengelemenin fonksiyonel modeli olarak doğrusallaştırılmış düzeltme denklemleri,

$$\underline{v} = \underline{A}\,\underline{x} - \underline{l} \qquad (2.1)$$

ve stokastik modeli olarak ölçülerin ağırlık matrisi $\underline{P} = \underline{Q}_{ll}^{-1}$ verilmiş olsun. Buna göre;

$$\underline{N}\,\underline{x} - \underline{n} = 0 \quad ; \quad \underline{N} = \underline{A}^T \underline{P}\,\underline{A} \quad , \quad \underline{n} = \underline{A}^T \underline{P}\,\underline{l} \qquad (2.2)$$

ve bilinmeyenler vektörü $\underline{x}$,

$$\underline{x} = \underline{N}^{-1}\,\underline{n} \qquad (2.3)$$

bulunur. Bilinmeyenlerin ağırlık katsayıları (kofaktör) matrisi

$$\underline{Q}_{xx} = \underline{N}^{-1}, \qquad (2.4)$$

ve düzeltmeler ve bunların ağırlık katsayıları matrisi,

$$\underline{v} = -\underline{Q}_{vv}\,\underline{P}\,\underline{l} \quad , \quad \underline{Q}_{vv} = \underline{P}^{-1} - \underline{A}\,\underline{Q}_{xx}\,\underline{A}^T, \qquad (2.5)$$

düzeltilmiş ölçüler ve bunların ağırlık katsayıları matrisi

$$\hat{\underline{l}} = \underline{l} + \underline{v} \quad , \quad \underline{Q}_{\hat{l}\hat{l}} = \underline{A}\underline{Q}_{xx}\underline{A}^T \qquad (2.6)$$

olarak verilir (Demirel, 1987; 1990b).

3.UYUŞUMSUZ ÖLÇÜ TESTLERİ

Kaba hatalı ölçülerin araştırılması amacıyla çeşitli test yöntemleri geliştirilmiştir. Bu yöntemler arasındaki fark, düzeltmeleri standartlaştırmak için değişik varyans faktörleri kullanılmasından kaynaklanmaktadır. Baarda' ya göre test yönteminde (data-snooping) önsel varyans (σ_0^2), Pope' ye göre test yönteminde sonsal (a posteriori) varyans (m_0^2) ve t testinde kaba hatalı ya da uyuşumsuz olup olmadığı araştırılan bir ölçünün (l_i) dışında kalan ölçülere dayalı olarak belirlenen sonsal varyans (m_{0i}^2) kullanılır. Söz konusu yöntemler için test büyüklükleri (standartlaştırılmış düzeltmeler);

Baarda' ya göre:

$$\overline{v}_{i,B} = |v_i| / (\sigma_0 \sqrt{Q_{vivi}}) \sim N(0,1) \text{ standart normal dağılımlı} \tag{3.1}$$

Pope' ye göre:

$$\overline{v}_{i,P} = |v_i| / (m_0 \sqrt{Q_{vivi}}) \sim \tau_f \text{ (Tau) dağılımlı} \tag{3.2}$$

t testine göre:

$$\overline{v}_{i,t} = |v_i| / (m_{0,i} \sqrt{Q_{vivi}}) \sim t_{f-1} \text{ (t) student dağılımlı} \tag{3.3}$$

ve

$$m_{0i}^2 = (\underline{v}^T \underline{P} \underline{v} - \frac{v_i^2}{Q_{vivi}}) / (f-1) \tag{3.4}$$

olarak verilir. Tüm ölçüler kuşkulu uyuşumsuz olarak görülür. $\overline{v}_{max} = \max(\overline{v}_i \,;\, i = 1,2,\ldots,n)$ ilgili dağılımın sınır değerinden büyükse;

$$\overline{v}_{max,B} > z_{1-\alpha 0/2}, \tag{3.5}$$

$$\overline{v}_{max,P} > \tau_{f,1-\alpha 0/2}, \tag{3.6}$$

$$\overline{v}_{max,t} > t_{f-1,1-\alpha 0/2}, \tag{3.7}$$

bu standartlaştırılmış düzeltmesi en büyük olan ölçünün uyuşumsuz olduğuna karar verilir.

$z_{1-\alpha 0/2}$ normal dağılım, $\tau_{f,1-\alpha 0/2}$ τ-dağılım ve $t_{f-1,1-\alpha 0/2}$ t-dağılım çizelgesinden alınır. Hata kaynakları belirlenebilirse ölçü düzeltilir. Aksi durumda ölçüler arasından çıkarılır. Gerekli görülürse ilgili büyüklük yeniden ölçülür. Kalan ölçüler ile dengeleme ve test işlemleri kaba hatalı ölçü çıkmayıncaya dek benzer biçimde yinelenir.

4.UYUŞUMSUZ ÖLÇÜLERİN EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİYLE KESTİRİLENLER ÜZERİNDEKİ BOZUCU ETKİLERİ

EKK yöntemi uyuşumsuz ölçülere karşı çok duyarlıdır (Huber,1977). Uyuşumsuz ölçüler EKK yöntemi ile kestirilen tüm değerleri bozar (Hampel at al,1986; Gao et al,1992). EKK yöntemi, ancak gözlemler kesin olarak normal dağılımlı ise doğru ve optimal bir çözüm verir. Tersine ölçüler normal dağılımlı değilse veya uyuşumsuz ölçüleri içeriyorsa doğru sonuç vermez.

Uyuşumsuz ölçüler veya model hataları $\underline{\Delta}$, model hipotezine uygun yani aynı bir normal dağılıma sahip ölçüler $\underline{\bar{l}}$ ile gösterilirse

$$\underline{l} = \underline{\bar{l}} - \underline{\Delta} \tag{4.1}$$

yazılabilir (Koch,1987). Bu durumda Gauss-Markoff modeli

$$\begin{aligned} \underline{l} + \underline{v} &= \underline{A}\,\underline{x} \\ \underline{C}_l &= m_0^2\,\underline{P}^{-1} \end{aligned} \tag{4.2}$$

ve ayrıca uyuşumsuz ölçülerin olmaması durumunda

$$\underline{\bar{l}} + \underline{\bar{v}} = \underline{A}\,\underline{\bar{x}} \tag{4.3}$$

olarak verilebilir. Burada $\underline{\bar{v}}$ model hipotezine uygun, yani uyuşumsuz ölçüleri içermeyen ölçülerin düzeltmeleri, $\underline{\bar{x}}$ ise uyuşumsuz ölçülerden etkilenmemiş bilinmeyenlerdir. (4.2) eşitliği EKK yöntemi ile çözülür ve (4.1) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\underline{\hat{x}} = (\underline{A}^T \underline{P}\underline{A})^{-1} \left[\underline{A}^T \underline{P}\underline{\bar{l}} - \underline{A}^T \underline{P}\underline{\Delta}\right] = \underline{\hat{\bar{x}}} - \underline{Q}_{xx}\,\underline{A}^T \underline{P}\underline{\Delta} \tag{4.4}$$

$$\underline{\hat{v}} = \underline{A}\underline{\hat{x}} - \underline{l} = \underline{A}(\underline{\hat{\bar{x}}} - \underline{Q}_{xx}\,\underline{A}^T \underline{P}\underline{\Delta}) - (\underline{\hat{\bar{l}}} - \underline{\Delta}) = \underline{\hat{\bar{v}}} + \underline{Q}_{vv}\,\underline{P}\underline{\Delta} \tag{4.5}$$

$$m_0^2 = \frac{(\underline{v}^T \underline{P}\underline{v})}{n-u} = \frac{(\underline{\hat{\bar{v}}} + \underline{Q}_{vv}\,\underline{P}\underline{\Delta})^T \underline{P}(\underline{\hat{\bar{v}}} + \underline{Q}_{vv}\,\underline{P}\underline{\Delta})}{n-u} \tag{4.6}$$

$$m_0^2 = \overline{m}_0^2 + \frac{(\underline{Q}_{vv}\,\underline{P}\underline{\Delta})^T \underline{P}(\underline{Q}_{vv}\,\underline{P}\underline{\Delta}) + \underline{\bar{v}}^T \underline{Q}_{vv}\,\underline{P}\underline{\Delta} + (\underline{Q}_{vv}\,\underline{P}\underline{\Delta})^T \underline{P}\underline{\bar{v}}}{n-u} \tag{4.7}$$

Bu (4.4), (4.5) ve (4.7) eşitliklerinden görüldüğü gibi uyuşumsuz ölçüler EKK yöntemi ile kestirilen tüm değerleri bozmaktadır. Tüm bu bozulmalar, hem $\underline{\Delta}$ uyuşumsuz ölçülerin büyüklüğüne, hem de A tasarım matrisine yani ağın geometrisine bağlıdır (Hekimoğlu, 1994 ; 1997).

5.ROBUST M-KESTİRİMİ İLKESİ VE YİNELEMELİ YENİDEN AĞIRLIKLANDIRMALI EN KÜÇÜK KARELER ALGORİTMASI İLE ÇÖZÜMÜ

Uyuşumsuz ölçü testleri genellikle bir analizle tek uyuşumsuz (standartlaştırılmış düzeltmesi en büyük) ölçüyü belirlemeye yatkındır. Bir uyuşumsuz ölçü belirlenir ve atılır. Daha sonra EKK yöntemi geri kalan ölçülere yeniden uygulanır. Yeniden uyuşumsuz ölçü testi yapılır ve işlem böyle sürer. Uyuşumsuz ölçüler, test yöntemleri ile belirlendikten sonra atılıp ölçüler bunlardan arındırılır ve daha sonra bu ayıklanmış ölçülere EKK yöntemi yeniden uygulanır. Eğer ölçüler bir tek uyuşumsuz ölçü içerseler bile, EKK yöntemi ile kestirilen tüm değerler bu uyuşumsuz ölçü veya ölçüler tarafından bozulmuşlardır. Bu bozulmuş, hatta kaymış (bias) değerlerle doğru bir test yapılamayacağı açıktır. Ayrıca EKK yöntemi uyuşumsuz ölçünün etkisini diğer uyuşumlu ölçüler üzerine yaymaktadır, yani bozucu etkiyi diğer iyi ölçülere dağıtmaktadır. Bu nedenle uyuşumsuz ölçü testleri, uyuşumsuz ölçüleri belirlemede beklenildiği kadar keskin, ayırıcı ve yeterli değildir (Gao et al,1992). Hatta test sonucunda, uyuşumsuz olmayan bir ölçü uyuşumsuz çıkabilmektedir.

Huber (1964)' in makalesi istatistikte yeni bir dalı başlatmıştır: Robust İstatistik. Daha sonra Hampel (1968) ve daha birçok araştırıcının katkıları olmuş ve olmaktadır. Bu arada birçok robust kestirici bulunmuştur. Huber'in M-Kestiricisi (1964-1968), Andrews (1974)'ün sinüs M-Kestiricisi, iki ağırlıklı fonksiyon (Beaton ve Tukey 1974) bunlardan en önemlileridir.

Robust kestirimin yararı, uyuşumsuz ölçülerin kestirilen bilinmeyenler üzerindeki bozucu etkisini azaltması hatta yok etmesidir (Gao et al,1992). Model varsayımlarından küçük sapmalara karşı duyarlı değildir. Yerel sapmalar tüm düzeltmeleri bozmaz yalnızca ilgili düzeltmeleri büyütür (Caspary ve Borutta 1987). Robust kestirimin modellenemeyen bozucu etkilerin bulunması durumunda EKK yöntemine göre yararları açıktır. Robust kestirimde (M-Kestirimi) önemli bir özellik yinelemeli yeniden ağırlıklandırmalı EKK yöntemine göre bilinmeyenlerin çözümü sırasında, başlangıçta verilen a piriori P ağırlık matrisinin yineleme aşamasında uyuşumsuz ölçülere ait olan yalancı ağırlıklarının küçülmesi hatta sıfıra gitmesidir. Bu özellik uyuşumsuz ölçülerin tanınmasını, saptanmasını sağlar. Böylece bilinmeyenler uyuşumsuz ölçülerden en az etkilenmiş olarak belirlenmiş olur.

EKK yöntemi ile $\underline{\hat{x}}$ değerleri belirlenir; W(v) ağırlık fonksiyonu v'ler bilinmediğinden doğrudan çözülemez. Ancak ρ(v) için gerçel değerli bir fonksiyon seçilip yinelemeli yeniden ağırlıklandırmalı EKK yöntemi ile

$$\underline{\hat{x}}_k = (\underline{A}^T \underline{W}_k \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{W}_k \underline{l}, \qquad (5.1)$$

$$\underline{W}_k = \underline{P}\underline{W}(\underline{v}_{k-1}) \quad , \qquad k = 1,2,\ldots,n \quad , \tag{5.2}$$

$$\underline{W}(\underline{v}_0) = I \tag{5.3}$$

$$\underline{W}(\underline{v}) = \mathrm{diag}(W(v_1), W(v_2), \ldots, W(v_n))$$

çözülebilir. Burada P, ölçülerin a piriori ağırlık matrisi ve k yineleme (iterasyon) sayısı, W=W(v) ise seçilen bir ağırlık fonksiyonudur. Buna yalancı ağırlık matrisi de denebilir. Başlangıçta k=1 için $\underline{W}(\underline{v}_0)=\underline{I}$ ve dolayısıyla $\underline{W}_1=\underline{P}$ alınır. Özetle, önce EKK yöntemi ile gözlemlerin dengelemesi yapılıp v'ler bulunur ve sonra W yalancı ağırlık matrisi belirlenip, yeniden dengeleme yapılır. Bu yinelemeli ardışık çözüm sonuçları ($\hat{\underline{x}}_k$) arasındaki farklar verilen belirli bir sayıdan küçük oluncaya kadar sürdürülür. Bu yinelemeli çözümde W yalancı ağırlık matrisi her aşamada yeniden belirlenir.

Uyuşumlu ölçülerin düzeltmeleri uyuşumsuz ölçülerin düzeltmelerine göre daha küçük olduğu için uyuşumlu ölçülerin ağırlıkları (W_k), x bilinmeyenleri (5.1) ve (5.2) eşitliklerinden yinelemeli EKK yöntemiyle çözümü süresince hemen hemen hiç değişmemesine karşın, uyuşumsuz sanılan ölçülerin ağırlıkları (W_k) giderek küçülmekte ve hatta sıfıra gitmektedir. Dolayısıyla bunların bilinmeyenler üzerindeki bozucu etkileri yok sayılabilecek mertebelere düşmektedir. Bu Robust M-kestirimin en önemli özelliklerinden birisidir. Böylece kuşkulanılan uyuşumsuz ölçüleri tanımak, saptamak olanaklı olmaktadır (Hekimoğlu, 1994).

6.UYGULAMADA EN ÇOK KULLANILAN AĞIRLIK FONKSİYONLARI

6.1.Huber'in ağırlık fonksiyonu

$$W(v_i) = \begin{cases} 1 & |v_i| \le c \\ \dfrac{c}{|v_i|} & |v_i| > c \end{cases} \tag{6.1}$$

6.2.Andrews ağırlık fonksiyonu

$$W(v_i) = \begin{cases} \left(\dfrac{|v_i|}{c}\right)^{-1} \sin\dfrac{|v_i|}{c} & |v_i| \le c\pi \\ 0 & |v_i| > c\pi \end{cases} \tag{6.2}$$

6.3. Beaton-Tukey ağırlık fonksiyonu

$$W(v)=\begin{cases}(1-u^2)^2 & |u|\le 1\\ 0 & |u|>1\end{cases} \qquad (6.3)$$

$$u_i=\frac{|v_i|}{(q_{vivi})^{1/2}cS_n} \qquad (6.4)$$

S_n; v_i'lerin ortanca değeridir.

6.4. c parametresi

c sabiti ölçünün uyuşumsuz olup olmadığı konusunda çok önemli bir rol oynar. Bunun sabit değil, verilen bir yanılma olasılığına, tasarım (katsayılar) matrisine ve a priori ağırlıklı varyansın kareköküne bağımlı olarak verilmesi gerekir.

İstatistikçiler c için $1.5\sigma_0$, $2\sigma_0$ gibi sabit değerler almaktadırlar. Oysa bunun hem A tasarım matrisine hem de α yanılma olasılığına bağlı olarak

$$c_i=\sigma_0\sqrt{Q_{vivi}}\,t_{(1-\alpha/2),f} \qquad (6.5)$$

biçiminde belirlenmesi daha gerçekçi olur (Xu,1989).

7. SAYISAL UYGULAMA

Bu çalışmada jeodezik temel ağların bir kesimini oluşturan bir kenar ağında araştırmalar yapılmıştır. Uygulama için Şekil 7.1'de gösterilen yapay 7 noktalı bir kenar ağı alınmıştır. Yapay kenarlara yapay olarak üretilmiş normal dağılmış rasgele gözlem hataları eklenerek kenar ölçüleri elde edilmiştir. Robust M-Kestirimi için Andrews'un ağırlık fonksiyonu seçilmiştir. Kirletilmiş kenar ölçüsü elde etmek için yapay kenarlara sırasıyla 4σ, 6σ ve 8σ büyüklüğünde kaba hatalar eklenmiştir. Uyuşumsuz ölçüler rastgele değil, tüm kenarlar uyuşumsuz olabilecek şekilde düzenlenmiştir. Diğer bir deyişle rastgele bir kenar kaba hatalı ölçü olarak seçilmemiş sırasıyla tüm kenarlar uyuşumsuz ölçü olarak ele alınmıştır.

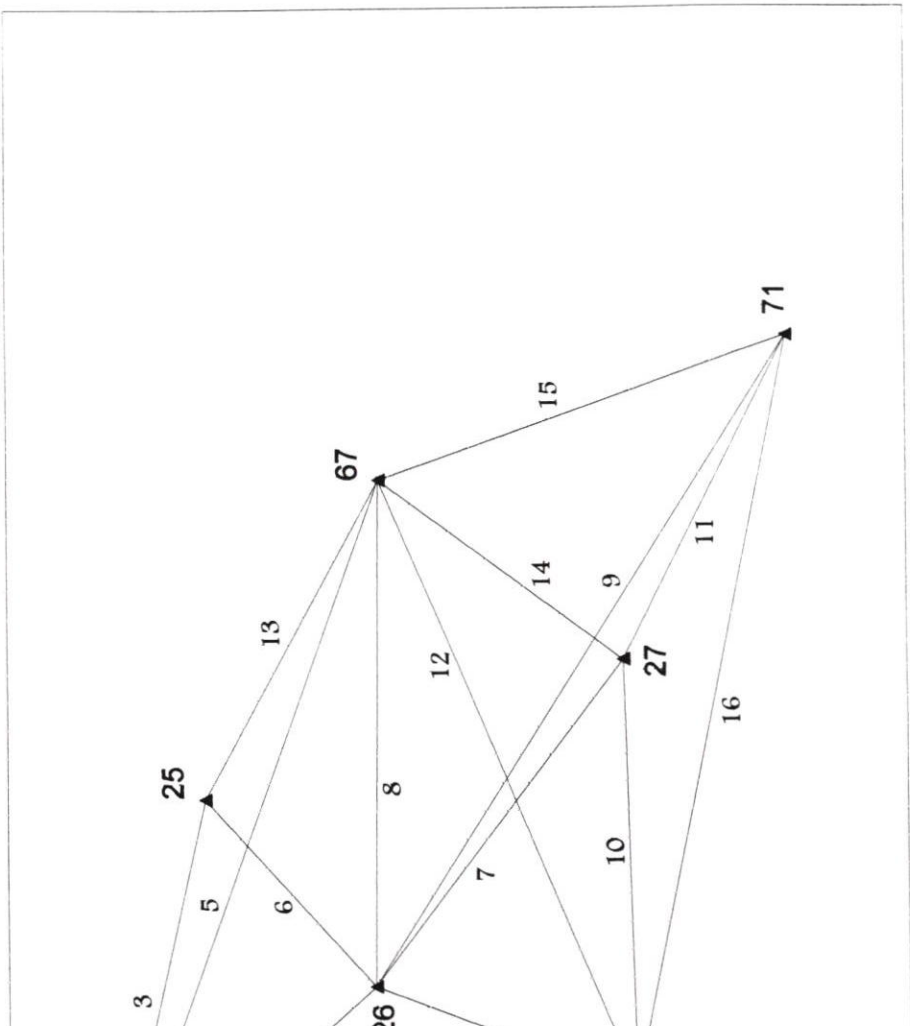
Noktaların koordinatları Tablo 6.1'de verilmiştir. Bu koordinatlardan yararlanarak kenarlar hesaplanmıştır. Bu kenarları ölçü olarak ele alabilmek için; bu kenarlara $\underline{\varepsilon} \sim N(\mu = 0$ ve $\sigma^2 = 4$ cm$^2)$ olacak şekilde rastgele sayı üreteci ile elde edilmiş normal dağılmış bir dizi $\underline{\varepsilon}_i(i=1,2,...,n)$ eklenmiştir. EKK yöntemi ile bulunacak düzeltmelerin bütün çözümlerde aynı kalması için ağ, serbest olarak dengelenmiştir.

Yapay kenarlara; önce tek tek, sonra ikişer ikişer olmak üzere kaba hatalar verilmiştir. Bu kaba hatalar; α=0.05, α=0.01 ve α=0.001 anlamlılık düzeyleri ile Baarda, Pope test yöntemleri ve $\sigma=\sigma_0$ ve $\sigma=m_0$ için Andrews'ün sinüs kestirimi yöntemi kullanarak araştırılmış ve sonuçlar karşılaştırılabilmesi için tablolarda toplanmıştır. C değeri (6.5) eşitliğine göre hesaplanmıştır.

Tablo 6.2 ve Tablo 6.3 oluşturulurken olanaklı tüm durumların ele alınması sonucu elde edilen başarı oranları tabloya işlenmiştir. Şöyleki; 1ve 2 numaralı kenarlara kaba hata verilmiş, sonra 1 ve 3 numaralı kenarlara kaba hata verilmiş ve bu şekilde işleme devam edilerek 1 ve 16 numaralı kenarlara kaba hata verilmiştir. Bu kaba hatalar tablolarda belirtilen yöntemlerle araştırılmış ve elde edilen sonuçlar tablolarda toplanmıştır. Aynı şekilde 2 numaralı kenardan başlayarak 2 ve 3 numaralı kenarlara, 2 ve 4 numaralı kenarlara kaba hatalar verilerek işleme devam edilmiş ve sonuçlar toplu bir şekilde tek bir tabloda toplanmıştır. Başarı oranı: Seçilen test yönteminde kullanılan α anlamlılık düzeyi için, başarılı sonuçların o an kullanılan tüm durumlar sayısına oranı olarak tanımlanmıştır.

Tablo 6.1 Yapay kenar ağı noktalarının koordinatları

Nokta Numarası	Y	X
3	47 701 . 490	55 499 . 407
4	48 275 . 740	54 134 .050
25	47 818 . 936	54 151 .043
26	47 535 . 850	54 790 . 210
27	47 101 . 531	55 402 . 553
67	46 724 . 099	55 065 . 431
71	46 027 . 324	56 240 . 666



Şekil 7.1. Kenar Ağı

Tablo 6.2. 8 cm hata verilerek; olanaklı tüm durumların dikkate alındığı, iki kaba hatalı örnek kümelerin başarı oranları takip kolaylığı sağlamak amacıyla tek bir tabloda toplanmıştır.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
Andrews															
($\sigma=m_0$)															
$\alpha=0.05$	0.33*) 0.33	0.14 0.57	0.77 0.62	0.92 0.33	0.36 0.64	0.30 0.40	0.22 0.44	0.50 0	0 0.29	0.83 0	0.40 0.20	0.25 0	0.33 0.67	0 0	1 0
$\alpha=0.01$	0.33 0.27	0 0.43	0.85 0.54	1 0.25	0 0.36	0.10 0.50	0.44 0.33	0.50 0	0 0.29	0.50 0.17	0 0	0.25 0	0 0.67	0 0	1 0
$\alpha=0.001$	0.27 0.20	0 0.50	0.85 0.46	1 0.17	0 0.18	0 0.30	0.44 0.22	0.38 0	0 0.14	0.33 0.17	0 0	0 0	0 0.33	0.50 0	1 0
Pope															
$\alpha=0.05$	0.33 0.33	0.14 0.43	0.08 0.46	0.67 0.08	0.18 0.18	0 0.40	0.22 0.44	0.50 0	0 0.43	0.83 0.17	0 0.20	0.75 0	0 0.33	1 0	1 1
$\alpha=0.01$	0.20 0.07	0 0.14	0.08 0.31	0.08 0.08	0 0	0 0.20	0 0.11	0.25 0	0 0.29	0.50 0.17	0 0	0.25 0	0 0.33	0.50 0	0 0
$\alpha=0.001$	0 0.07	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0.11	0 0	0 0	0.17 0.17	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
Baarda															
$\alpha=0.05$	0.93 0.80	0.79 0.93	0.62 0.92	1 0.75	1 0.91	0.90 0.80	0.67 0.89	1 0.88	0.86 0.71	0.83 0.50	1 0.60	0.75 0.50	1 1	1 0.50	1 1
$\alpha=0.01$	0.87 0.73	0.57 0.86	0.46 0.85	1 0.67	1 0.82	0.50 0.80	0.33 0.67	1 0.75	0.71 0.71	0.83 0.50	1 0.60	0.50 0.25	1 0.67	1 0	1 1
$\alpha=0.001$	0.73 0.60	0.50 0.71	0.23 0.69	0.92 0.67	0.82 0.64	0.30 0.70	0.22 0.56	1 0.63	0.43 0.43	0.83 0.33	0.80 0.40	0.50 0.25	1 0.67	1 0	1 1
Andrews															
($\sigma=\sigma_0$)															
$\alpha=0.05$	0.80 0.73	0.79 0.86	0.69 0.85	1 0.67	0.91 0.82	0.90 0.80	0.33 0.67	0.88 0.50	0.86 0.71	0.83 0.50	1 0.60	0.50 0.50	1 0.67	0.50 0.50	1 1
$\alpha=0.01$	0.73 0.67	0.50 0.71	0.69 0.69	1 0.67	0.91 0.73	0.80 0.50	0.22 0.56	1 0.50	0.57 0.57	0.67 0.50	1 0.60	0.75 0.50	1 0.67	0 0	1 1
$\alpha=0.001$	0.53 0.67	0.43 0.50	0.69 0.62	0.83 0.50	0.82 0.73	0.50 0.50	0.11 0.44	1 0.50	0.43 0.29	0.83 0.50	1 0.60	0.50 0.25	1 0.67	0.50 0	1 0

*) Bu karedeki birinci oran birinci kaba hatanın belirlenme başarı oranı, ikinci oran ikinci kaba hatanın belirlenme başarı oranıdır.

Tablo 6.3. 12 cm hata verilerek; olanaklı tüm durumların dikkate alındığı, iki kaba hatalı örnek kümelerin başarı oranları takip kolaylığı sağlamak amacıyla tek bir tabloda toplanmıştır.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
Andrews ($\sigma=m_0$)															
$\alpha=0.05$	0.33*) 0.40	0.29 0.57	0.77 0.77	0.92 0.42	0.36 0.64	0.30 0.70	0.56 0.44	0.50 0.13	0 0.29	0.83 0.17	0.40 0.20	0.25 0	0.67 0.67	0 0	1 0
$\alpha=0.01$	0.33 0.33	0 0.57	0.85 0.62	1 0.33	0 0.36	0.20 0.40	0.56 0.33	0.50 0	0 0.29	0.50 0.17	0.20 0	0.25 0	0 0.67	0 0	1 0
$\alpha=0.001$	0.20 0.20	0 0.50	0.85 0.46	1 0.17	0 0.36	0 0.30	0.56 0.11	0.38 0	0 0.14	0.33 0.17	0 0	0 0	0 0.33	0.50 0	1 0
Pope															
$\alpha=0.05$	0.33 0.33	0.14 0.57	0.08 0.62	0.67 0.08	0.27 0.09	0 0.50	0.22 0.44	0.25 0	0 0.43	0.83 0.17	0 0.20	0.75 0	0.33 0.33	1 0	1 1
$\alpha=0.01$	0.20 0.13	0 0.29	0.08 0.31	0.25 0.08	0 0	0 0.20	0 0.22	0.25 0	0 0	0.67 0.17	0 0	0.25 0	0 0	0 0	1 0
$\alpha=0.001$	0 0.07	0 0	0.08 0.08	0 0	0 0	0 0	0 0.11	0 0	0 0	0.17 0.17	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
Baarda															
$\alpha=0.05$	0.93 0.87	0.86 0.93	0.69 0.92	1 0.83	1 0.91	0.90 0.90	0.89 0.89	1 1	1 0.71	0.83 0.50	1 0.60	1 0.75	1 1	1 0.50	1 1
$\alpha=0.01$	0.93 0.80	0.86 0.93	0.69 0.92	1 0.75	1 0.91	0.90 0.80	0.89 0.89	1 1	0.86 0.71	0.83 0.50	1 0.60	1 0.50	1 1	1 0.50	1 1
$\alpha=0.001$	0.80 0.80	0.64 0.93	0.46 0.92	1 0.75	1 0.91	0.70 0.80	0.67 0.89	1 0.88	0.86 0.71	0.83 0.50	1 0.60	0.75 0.50	1 1	1 0	1 1
Andrews ($\sigma=\sigma_0$)															
$\alpha=0.05$	0.87 0.80	0.64 0.93	0.69 0.92	1 0.75	0.91 0.91	1 0.90	0.89 0.89	1 1	0.86 0.71	0.83 0.50	1 0.60	1 0.75	1 1	1 0.50	1 1
$\alpha=0.01$	0.87 0.73	0.71 0.93	0.69 0.85	1 0.75	0.91 0.91	0.90 0.80	0.89 0.56	1 0.88	0.86 0.71	0.67 0.50	1 0.60	1 0.75	1 0.67	1 0.50	1 1
$\alpha=0.001$	0.87 0.67	0.57 0.86	0.69 0.77	1 0.75	0.91 0.91	0.90 0.70	0.77 0.56	1 0.75	0.71 0.57	0.83 0.50	1 0.60	0.50 0.50	1 1	0 0.50	1 1

*) Bu karedeki birinci oran birinci kaba hatanın belirlenme başarı oranı, ikinci oran ikinci kaba hatanın belirlenme başarı oranıdır.

8. UYGULAMA SONUÇLARININ DEĞERLENDİRİLMESİ

Uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesinde iki durum ortaya çıkabilir.
a) Gözlem hatalarının çıktığı kümenin varyansı (σ_0^2) biliniyor:
- Klasik uyuşumsuz ölçü testi (Baarda) ile uyuşumsuzlar iteratif olarak belirlenir.
- Robust kestirim yöntemleri ile uyuşumsuzların tanısı yapılabilir. Örneğin bu çalışmada Andrews'un Sinüs M-Kestirimi yöntemi kullanılmıştır.
b) Gözlem hatalarının çıktığı kümenin varyansı (σ_0^2) bilinmiyor: Bu durumda σ_0^2 yerine sonsal varyans m_0^2 alınır.
- Uyuşumsuzlar klasik uyuşumsuz ölçü testi (Pope) ile iteratif olarak belirlenir.
- Robust kestirim yöntemleri ile uyuşumsuzların tanısı yapılabilir.

Uygulama aşamasında ölçülere kaba hatalar verilirken önce o ölçüye ait olan rastgele hatalar çıkarılmış sonra kaba hata yerleştirilmiştir. Böylece kaba hataların rastgele hatalardan etkilenmesi önlenmiştir.

n kenarlı bir kenar ağında tek bir kaba hatalı örnek küme oluşturulurken kaba hata rastgele bir kenara verilmemiştir. Tüm kenarlara sırasıyla teker teker kaba hata eklenerek kaç tane kenar varsa o kadar sayıda yani $\binom{n}{1}$ tek kaba hatalı örnek kümeler elde edilmiştir. İki kaba hatalı örnek kümeler yine rastgele iki kenara kaba hata eklenerek oluşturulmamıştır. Olanaklı tüm durumlar dikkate alınmıştır. Yani $\binom{n}{2}$ sayıda iki kaba hatalı örnek kümeler oluşturulmuştur.

Ölçü sayısının 16 ve kaba hata miktarının 4σ, 6σ ve 8σ olması durumları için oluşturulan tablolarda beklenildiği gibi kaba hata miktarı arttıkça kullanılan yöntemlerin başarı oranı artmaktadır. Bu durum ölçü sayısının 16'dan 21'e çıkarılması durumunda da aynıdır.

α anlamlılık düzeyi için 0.05, 0.01 ve 0.001 değerleri seçilmiştir. Tablolardan görüldüğü üzere; kullanılan yöntemler $\alpha=0.05$ durumunda en başarılı sonuçları vermiştir. α anlamlılık düzeyi küçüldükçe başarı oranıda azalmaktadır.

Andrews'un sinüs kestirimi yöntemi için $\sigma=\sigma_0$ ve $\sigma=m_0$ olmak üzere iki ayrı durumda test yapılmıştır. Bu yöntemin $\sigma=\sigma_0$ durumunda daha başarılı olduğu görülmüştür. Bu durumda önsel varyans olan (σ_0^2) değerinin bilinmesinin önemini göstermektedir.

4σ ve 6σ büyüklüğündeki hataların negatif değerli olarak verilmesi durumlarında diğer yöntemlerde pek bir değişiklik olmamakla birlikte Andrews'un Sinüs Kestirimi yönteminde $\sigma=\sigma_0$ alınması durumunda başarı oranı artmıştır.

Ölçülerde iki tane kaba hata olması durumunda, elde edilen sonuçlarda başarısız durumlar tekrar ele alınarak bu hataların farklı yönlerde olması durumunda nasıl bir sonuç elde edileceği araştırılmıştır. Bu kez aynı kaba hataların işaretleri biri +, diğeri - olacak şekilde değiştirilmiştir. Bu durumda kullanılan yöntemlerin başarı oranının arttığı görülmüştür.

Hataların farklı yönlerde (birinin pozitif diğerinin negatif) olması durumunda ilginçtir ki diğer yöntemlerde başarı az miktarda artmakla birlikte Andrews'un Sinüs Kestirimi yönteminde $\sigma=m_0$ alınması durumunda başarı oranı oldukça artmıştır.

Redundans paylarının önemini görebilmek için bir noktadan çıkan kenar ölçüsü (13 numaralı ölçü) iptal edilerek redundans değeri düşürülmüştür. Bunun sonucu olarak başarı oranı oldukça düşmüştür. Bu da bize redundansların önemini göstermektedir.

9.SONUÇ VE ÖNERİLER

a) Tek kaba hata olması durumunda

Kaba hatalı ölçüler EKK yöntemi ile elde edilen tüm sonuçları bozmaktadır. Geleneksel uyuşumsuz ölçü testleride uygulansa, tek kaba hatalı ölçüyü bile güvenilir olarak belirlemek olanaklı değildir.

Geleneksel uyuşumsuz ölçü testi Baarda yöntemi ile genel olarak bir kaba hatalı ölçü belirlenebilmektedir. Ancak kaba hatanın genliği 3σ ya yaklaştıkça Baarda yönteminin başarısı azalmaktadır. Pope yöntemi ile genel olarak bir kaba hatayı güvenilir olarak belirlemek olanaklı değildir.

Robust M-Kestirimi Andrews ağırlık fonksiyonu ile eğer varyans belli ise genel olarak tek bir kaba hatayı belirleyebilmektedir. Yalnız başarı oranı Baarda'ya göre daha düşüktür. Varyans bilinmediği durumda Pope'den daha başarılı sonuçlar vermektedir.

b) İki kaba hata olması durumu

Ölçüler iki kaba hata içerdiği durumda Baarda, Pope ve Andrews M-Kestiriminin başarı oranları tek bir kaba hata olması durumuna göre düşmektedir.

Ölçüler birden fazla kaba hata içerdiği zaman örneğin iki tane kaba hata olması durumunda eğer kaba hatalar rasgele oluşmuşsa, kullanılan yöntemlerin başarı oranı artmaktadır. Eğer kaba hatalar ortak etkilenmişse uyuşumlu bir gözlem kötü bir gözlem olarak, kötü bir gözlem iyi bir gözlem olarak saptanabilmektedir.

Kullanılan yöntemlerde kaba hata sayısı arttıkça başarı oranı düşmektedir.

Kaba hata miktarı arttıkça kullanılan yöntemlerin başarı oranı artmaktadır.

Kullanılan yöntemler en başarılı sonuçları $\alpha=0.05$ durumunda vermişlerdir. α anlamlılık düzeyi küçüldükçe başarı oranıda azalmaktadır.

Serbestlik derecesi yükseldikçe yöntemlerın başarı oranları artmaktadır.

Test sonuçlarına göre ağın geometrik yapısının (yani redundans paylarının) önemli olduğu ortaya çıkmaktadır. Eğer ağdaki noktalar, birbirini kontrol edecek şekilde kurulmazsa bazı noktalarda redundans payları düşük olacaktır. Bu da test sonuçlarını olumsuz yönde etkilemektedir.

Kaba hataların bulunduğu ölçüler arasında komşuluk ilişkisi bulunduğu zaman test sonuçları daha başarısız olmaktadır.

Kaba hatalar a posteriori varyansı olumsuz yönde etkilemektedir. A piriori varyans değerinin bilinmesi durumunda test sonuçlarının başarı oranı yükselmektedir.

Kaba hataları güvenilir olarak belirlemek için güvenirliği daha yüksek olan robust yöntemler geliştirilmelidir.

KAYNAKLAR

1. Andrews, D. F. 1974. A Robust Method for Multiple Linear Regression. Technometrics, 16, pp. 523-531.

2. Beaton, A. E. ; Tukey, J. W. 1974. The Fitting of Power Series Meaning Polynomials, İllustrated on band-Spectroscopic data. Technometrics, 16, pp. 147-185.

3. Caspary,W.,Borutta,H.,1987. Robust Estimation Deformation Models. Survey Rewiew, 29, 223,pp. 29-45.

4. Demirel,H.,1987. Nirengi Ağlarının Dengelenmesi ve Sonuçlarının Test Edilmesi, Harita Dergisi, Sayı 98,s.1-17.

5. Demirel,H.,1990a. Dengeleme Hasabı-I, Y.T.Ü. İstanbul.

6. Demirel,H.,1990b. Dengeleme Hasabı-II, Y.T.Ü. İstanbul.

7. Gao Y.,Krakiwsky,E.J.,Czompo,J.,1992. Robust Testing Procedure for Detection Multiple Blunders. Jour. of Surv. Engine. Vol.118,No.1,pp.11-23.

8. Hampel, F., Ronchetti, E., Rousseeuw, P., and Stahel, W. (1986). Robust statistics: The approach based on influence functions. John Wiley & Sons, Inc. New York, N.Y.

9. Hekimoğlu, Ş.,Ayan T., Aktaş A.O.1994. Birden Fazla Uyuşumsuz Ölçünün Robust Kestirim Yöntemleriyle Belirlenmesi, Prof. Dr. H.Wolf Jeodezi Sempozyumu İstanbul.

10. Hekimoğlu, Ş., 1997. Finite Sample Breakdown Points of Outlier Detection Procedures, Jour. of Surv. Engine., ASCE, 123(1), 15-31.

11. Huber, P.J. (1977): Robust Statistical Procedures Soc. for Indust. and Appl. Mathem. Philadelphia.

12. Koch, K.R., (1987): Parameterschatzung und Hypothesentests in Linear Modellen, 2. Aufl., Dümmler-Verlag Bonn.

13. Koch, K.R., 1996. Robuste Parameterschatzung A.Verm. Nachr. 103, 1-18.

14. Kraup T., Juhl,J.,Kubik, K.,1983. Götterdammerung Over Least Squares Adjustement, 14 th Congress of The International Society of Photogrammery, Commission III Presented Paper, Denmark.

15. Xu, P.L.,1989 a. Statistical Criteria for Robust Methods, ITC Journal, No.1,pp.37-40.