GAUSS-KRÜGER TASVİRİ İÇİN FARKLI ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Faruk YILDIRIM *
Ahmet KAYA **

ÖZET

Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliği'nin hesap yönü ağırlıkta olan Matematiksel Jeodezi ve Kartografya 'nın konusu olan Gauss-Krüger Tasviri son yıllar da birçok yöntemle çözülmüştür. Tasvirin gerçekleştirilmesinde kullanılan fonksiyonlar şimdiye kadar ancak seriye açılarak, hazırlanan özel tablolar ve türevler yardımıyla belli bir boylam farkına kadar hesaplanabilmekteydi. Ancak günümüzde; trigonometrik, hiperbolik ve kompleks sayılar gibi rahatlıkla hesaplanan fonksiyonlar kullanılarak, tasvir denklemlerinde sadeleşmeyi sağlayan ve boylam farkı sınırlamasını ortadan kaldıran birçok yöntem geliştirilmiştir.

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Harita tamamen bir sanal yüzeydir. Bu hesap yüzeyindeki koordinatlara geçilebilmesi için, dünyanın şekline yakın bir hesap yüzeyi olan referans elipsoidindeki koordinatların bilinmesi gerekir. Hesap yüzeyleri, hesaplama işlemlerinin kolay yapılabileceği yüzeyler olarak seçilir. Bunlar kolaylık sırasına göre düzlem, küre ve elipsoiddir.

Jeodezi uygulamalarında elipsoid üzerinde hesap yapmanın külfetinden kaçınmak için referans yüzeyi olarak küre yada düzlemden yararlanılır. Bu maksatla, bir orijinal sistemden bir başka sisteme geçişi veya bunun tersini gerçekleştirmek için yapılan işleme tasvir denir. Bu geçiş işlemi de genellikle bir matematik bağıntı ile sağlanır. Tasvir uzunluk, alan ve açı koruyan olmak üzere üç çeşittir. Jeodezi uygulaması bakımından en uygun olanı açı koruyan yani konform tasvirdir. Gauss-Krüger Tasviri de elipsoidin düzleme konform tasviridir (Özbenli, 1982).

* Y. Müh. (Bayındırlık ve İskan Müdürlüğü Gümüşhane)
** Doç.Dr. (Karadeniz Teknik Üniversitesi Trabzon)

1.2. Gauss-Krüger Tasviri Hakkında Önbilgi ve Tasvir Şartları

Tasvir konusu; ilk kez Mercator' un 1550'li yılında yaptığı çalışmayla başlayıp, tasvir denklemlerinin kesinlik kazandığı 1820'li yıllarda C.F. Gauss ve Yüzbaşı O. Schreiber 1866 yılında yaptığı çalışmalara kadar güncelliğini korumuştur. Daha sonraları Postdam Jeodezi Enstitüsünde bölüm başkanı olan Prof. Dr. L. Krüger, Gauss'un belgelerini incelerken, Schreiber'ce bilinmeyen sayısız notlar bulmuş ve gayet detaylı olarak yayınlamıştır. Bundan dolayıdır ki, Krüger'in hatırasına hürmeten, sadece Gauss ismi kullanılmayarak tasvir sonucu elde edilen koordinatlara Gauss-Krüger koordinatları ismi verilmiştir (Grossmann, 1976). Bununla birlikte literatürde "Gauss-Krüger" ve "Transverse Mercator" projeksiyonu kavramları günümüzde UTM sistemi dolayısıyla eş anlamlı olarak kullanılmaktadır.

C.F. Gauss ve Prof. Dr. L. Krüger' in geliştirdiği tasvir denklemleri daha sonra W. Hristow tarafından yeniden incelenmiştir. Koordinatların elde edilmesinde günümüzde kullanılan tek ve çift değişkenli kuvvet serileriyle çözüm geniş ölçüde Hristow' un çalışmalarına dayanmaktadır. Ülkemizde, "Büyük Ölçekli Haritaların Yapım Yönetmeliğinin" 7. maddesine göre tasvir koordinatları, özel tablolar yardımıyla ancak sınırlı boylam farkına kadar çözüm yapılabilen çift değişkenli kuvvet serileriyle gerçekleştirilmektedir.

Gauss-Krüger Tasviri, referans elipsoidi üzerindeki (B,L) coğrafi koordinatlarının, konform olarak düzlem dik koordinatları (x,y)'ye dönüştürmektir. Bu tasviri gerçekleştirirken konformluktan başka iki ilave şartın sağlanması istenir (Grossmann, 1976).

- Tasviri yapılacak bölgenin takriben ortasından geçen bir L_0 ana meridyeni, tasvirde düzlem sistemin apsis ekseni olan bir doğru ile gösterilmelidir. Yani Başlangıç meridyenin düzlem tasviri x ekseni olmalıdır.

- Ana meridyenin tasviri uzunluk korumalıdır.

2. ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Elipsoid coğrafi koordinatlarından Gauss-Krüger koordinatlarının hesaplanması ve ters işlemi için tasvir denklemleri, giriş bölümünde de açıklandığı gibi birçok kez incelenmiş ve en son Hristow' un çalışmalarıyla kesinlik kazanmıştır. Günümüzde bu konu yeniden incelenerek tasviri gerçekleştiren tasvir denklemleri, farklı matematiksel yaklaşımlardan hareket eden birçok çözüm yöntemiyle geliştirilmiştir. Bu çalışma da, geliştirilen yöntemlerden sadece ikisi aşağıda sıralanan başlıklar içerisinde ve yöntemi geliştiren kişinin ismiyle belirtilerek ele alınacaktır;

1. Küreyi yardımcı yüzey kabul eden yöntemler
2. Kompleks sayı ve fonksiyonlara dayanan yöntemler.

2.1. Küreyi Yardımcı Yüzey Kabul Eden Yöntemler

Bilindiği gibi, (B,L)'den (x,y) hesabı ve ters işleminin geleneksel metodu (Gauss-Krüger Yöntemi) enleme bağlı fonksiyonların Taylor serisine açılımı ile elde ediliyordu. Seri açılımla oluşan tasvir denklemlerindeki terimlerin sayısı çok çabuk artmakta ve karmaşık hale gelmektedir.

Son yıllarda bu klasik metodun yerine hesap yükü az ve programlama açısından daha kolay olabilecek yeni yöntemler geliştirme çabasına gidilmiştir. Bu yöntemlerde kapalı küresel formüller kullanılarak, küre bir yardımcı yüzey alınmıştır. Böylece serilerle elde edilen tasvir denklemlerinde kısalma olmuş ve hesap yükü azalmıştır.

A. Schödlbauer, K. Krack, W. Williams, B. Bowring ve E. Mittermayer küreyi yardımcı yüzey kabul eden tasvir denklemleri geliştirmişlerdir. Bu yöntemlerden sadece E. Mittermayer' in geliştirdiği yöntem kendi ismiyle adlandırılarak açıklanmıştır. (Yıldırım, 1998).

2.1.1. Mittermayer Yöntemi

Mittermayer, küreyi yardımcı yüzey kabul eden diğer yöntemlerden farklı olarak, küre ile elipsoid arasındaki elipsoid düzeltmesini harmonik polinomlu Chebyshev Yaklaşımı ile hesaplanmıştır. Yardımcı yüzey küre; izometrik elipsoid coğrafi koordinatları (q,ℓ) ve elipsoid coğrafi koordinatları (B,L) olmak üzere, $(\bar{q},\bar{\ell})$

izometrik parametrelerinin oluşturduğu koordinat sistemiyle tanımlanmıştır. Bu sistemin (q,ℓ)'den dönüşümü için

$$
\begin{aligned}
&\bar{z} = f(z) \\
&\bar{q} + i\bar{\ell} = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctan} e^{q+i\ell} - 1
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ile tanımlanır. Buradaki ikinci eşitlik reel ve imajiner kısımlara ayrılırsa

$$
\begin{aligned}
&\bar{q} = \bar{q}(q,\ell) = \frac{2}{\pi}\left(\arctan\frac{e^{q}\cos\ell}{1-e^{q}\sin\ell} + \arctan\frac{e^{q}\cos\ell}{1+e^{q}\sin\ell}\right) - 1 \\
&\bar{\ell} = \bar{\ell}(q,\ell) = \frac{1}{\pi}\ln\frac{1+2e^{q}\sin\ell+e^{2q}}{1-2e^{q}\sin\ell+e^{2q}}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

elde edilir. Burada e^{q}'nun değeri

$$
e^{q} = e^{q(B)} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{B}{2}\right)\left(\frac{1-e\sin B}{1+e\sin B}\right)^{\frac{e}{2}}
\tag{3}
$$

şeklinde hesaplanır. $(\bar{q},\bar{\ell})$ izometrik parametrelerinden (q,ℓ) elipsoid izometrik parametrelerinin hesabı için (1)'den ters dönüşümle

$$
\begin{aligned}
&z = g(\bar{z}) \\
&q + i\ell = \ln\tan\left[\frac{\pi}{4}(\bar{q}+1) + i\frac{\pi}{4}\bar{\ell}\right]
\end{aligned}
\tag{4}
$$

yazılır ve reel, imajiner kısımlara ayrılırsa

$$
\begin{aligned}
&q = q(\bar{q},\bar{\ell}) = \frac{1}{2}\ln\frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\bar{\ell}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\bar{q}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\bar{\ell}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\bar{q}\right)} \\
&\ell = \ell(\bar{q},\bar{\ell}) = \arctan\frac{\sinh\left(\frac{\pi}{2}\bar{\ell}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\bar{q}\right)}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

elde edilir.

İzometrik $(\bar{q}, \bar{\ell})$ sistemiyle tanımlanan küre kutuplarda $P(\bar{q} = \pm 1,\ \bar{\ell} = 0)$ değerlerini alır. Ayrıca $(\bar{q}, \bar{\ell})$ sistemindeki parametreler $P(-1 \le \bar{q} \le 1,\ \bar{\ell} = \pm\infty)$ sınırları arasında değer alırlar. $\bar{q} =$ sabit parametre eğrileri meridyenleri, $\bar{\ell} =$ sabit parametre eğrileri de paralel daireleri meydana getirir.

B enleminden, q izometrik enlemine dönüşüm

$$q = q(B) = \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2}\right) + \frac{e}{2}\ln\frac{1 - e\sin B}{1 + e\sin B} \tag{6}$$

ile elde edilir. Elipsoid izometrik boylam farkı elipsoiddeki boylam farkına eşittir. (6)'in ters dönüşümü ise Newton iterasyonu ile

$$\begin{aligned} B^{i+1} &= B^{i} - F(B^{i})(1 + e'^{2}\cos^{2}B^{i})\cos B^{i} \\ F(B^{i}) &= \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{B^{i}}{2}\right) + \frac{e}{2}\ln\frac{1 - e\sin B^{i}}{1 + e\sin B^{i}} - q \\ B^{0} &= 2\arctan e^{q} - \frac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{7}$$

elde edilir (Mittermayer, 1993).

2.1.1.1. Coğrafi Koordinatlardan Gauss-Krüger Koordinatlarının Hesabı

(B,L)'den (x,y)'ye dönüşüm için Mittermayer'in geliştirdiği tasvir denklemi

$$\begin{aligned} x &= G_{90}\left[\bar{q} + A(\bar{q}, \bar{\ell})\right] \\ y &= G_{90}\left[\bar{\ell} + B(\bar{q}, \bar{\ell})\right] \\ G_{90} &= 10002288.29898945\text{m} \end{aligned} \tag{8}$$

şeklindedir. Burada G_{90}, B(0°,90°) enlem değerleri arasındaki meridyen yayı uzunluğudur. (B,L)'den $(\bar{q}, \bar{\ell})$'nin hesabı için, (6) ve (2) formülleri kullanılır.

$A(\bar{q},\bar{\ell})$ ve $B(\bar{q},\bar{\ell})$ Hayford Elipsoidi düzeltmeleri harmonik polinomlu Chebyshev Yaklaşımı ile aşağıdaki biçimde hesaplanır (Mittermayer, 1993).

$$\begin{aligned}
&A(\bar{q},\bar{\ell}) + iB(\bar{q},\bar{\ell}) = \bar{z}\sum_{k=0}^{\bar{n}=9} b_k \bar{z}^{2k} = (\bar{q} + i\bar{\ell})(C + iD) \\
&\bar{z} = \bar{q} + i\bar{\ell},\ \bar{n} = (n-1)/2,\ n = 19 \\
&A = \bar{q}C - \bar{\ell}D \\
&B = \bar{\ell}C + \bar{q}D
\end{aligned} \tag{9}$$

Buradaki b_k katsayılarının değerleri Çizelge 1'de verilmiştir.

2.1.1.2. Gauss-Krüger Koordinatlarından Coğrafi Koordinatların Hesabı

(x,y)'den (B,L)'ye dönüşüm için Mittermayer'in geliştirdiği tasvir denklemi

$$\begin{aligned}
&\bar{q} = \bar{x} + U(\bar{x},\bar{y}) \\
&\bar{\ell} = \bar{y} + V(\bar{x},\bar{y})
\end{aligned} \tag{10}$$

şeklindedir. Burada $\bar{x} = x / G_{90}$ ve $\bar{y} = y / G_{90}$ dır. $U(\bar{x},\bar{y})$ ve $V(\bar{x},\bar{y})$ Hayford Elipsoidi düzeltmeleri harmonik polinomlu Chebyshev Yaklaşımı ile aşağıdaki biçimde hesaplanır.

$$\begin{aligned}
&U(\bar{x},\bar{y}) + iV(\bar{x},\bar{y}) = \bar{w}\sum_{k=0}^{\bar{n}=8} c_k \bar{w}^{2k} = (\bar{x} + i\bar{y})(\bar{C} + i\bar{D}) \\
&\bar{w} = \bar{x} + i\bar{y},\ \bar{n} = (n-1)/2,\ n = 17 \\
&U = \bar{x}\bar{C} - \bar{y}\bar{D} \\
&V = \bar{y}\bar{C} + \bar{x}\bar{D}
\end{aligned} \tag{11}$$

Buradaki c_k katsayılarının değerleri Çizelge 1'de verilmiştir. $(\bar{q},\bar{\ell})$'den (B,ℓ)'yi hesaplamak için (5) ve (7) formülleri kullanılır. Daha öncede belirtildiği gibi elipsoid izometrik boylam farkı elipsoiddeki boylam farkına eşittir (Mittermayer, 1993).

Çizelge 1. Hayford Elipsoidi için b_k, c_k katsayıları (Mittermayer, 1995).

k	b_k	c_k
0	0.001685628506068199	-0.001682791943951609
1	-0.002787990035246185	0.002769270921275399
2	0.001406144128951385	-0.001368960846759100
3	-0.000359446088023138	0.000324000453438348
4	0.000065818155380135	-0.000045763421978784
5	-0.000012362414922592	0.000004654300350315
6	0.000002705098435961	-0.000000461487208082
7	-0.000000594185917121	0.000000057955655411
8	0.000000108319174054	-0.000000005930826936
9	-0.000000011483903104	

2.2. Kompleks Sayı ve Fonksiyonlara Dayanan Yöntemler

Coğrafi koordinatlardan Gauss-Krüger koordinatlara dönüşümü ve ters işleminde kullanılan genel denklemler, Taylor serilerine ve yardımcı yüzey küre kullanılarak geliştirilen formüllere dayanmaktaydı. Son yıllarda, hesap makinelerindeki gelişmeye paralel olarak hesap yükünden kaçılmayarak yeni yöntemler geliştirilmiştir.

Elipsoid noktalarını izometrik parametreler q ve ℓ, düzlem için izometrik parametreler x ve y olmak üzere, bu iki izometrik koordinat sistemi arasındaki konform tasvir denklemleri temelde kompleks fonksiyonlara dayanmaktaydı. Bu yöntemlerde geleneksel yöntemlerden farklı olarak kompleks fonksiyonlar üzerinden sonuca gidilmiştir. Böyle fonksiyonlara dayanan yöntemlerde terim ihmali söz konusu olmadığından, diğer yöntemlere nazaran boylam farkı sınırlaması yoktur ve hassasiyet yüksektir. Bu konuda B. Bowring ve J. Klotz çalışma yapmıştır. Bu yöntemlerden Klotz' un geliştirdiği yöntem detaylıca açıklanmıştır (Yıldırım, 1998)

2.2.1. Klotz Yöntemi

Gauss-Krüger tasvirinde, dönüşümün izometrik koordinat sistemleri arasında yapılması gerekir. (x,y) koordinat sistemi izometrik olduğundan, sadece (B,L) coğrafi koordinatlarının izometrik sisteme dönüştürülmesi gerekir. B enleminden q izometrik enlemine dönüşüm

$$q = \operatorname{arctanh}(\sin B) - e \operatorname{arctanh}(e \sin B) \tag{12}$$

denklemiyle gerçekleştirilir. Boylam ise coğrafi ve izometrik koordinat sisteminde aynıdır. Böylece her iki sistemde de $z=x+iy$ ve $\psi=q+i\ell$ kompleks izometrik koordinatları elde edilir. q enleminden B enlemine dönüşüm

$$\sin B_{i+1} = \tanh(q + e \operatorname{arctanh}(e \sin B_i)) \tag{13}$$

iterasyon işlemiyle yapılır. z ve ψ izometrik koordinatları arasındaki dönüşüm, enlemden meridyen yayı uzunluğunun hesabında ve ters dönüşümünde kullanılan formüllerden yapılacaktır.

Klotz, G meridyen yayı uzunluğunu M meridyen eğrilik yarıçapıyla tanımlanan

$$G = \int M dB \tag{14}$$

integrali üzerinden çözüme gitmiştir. Burada M' nin değeri yerine yazılırsa

$$G = a(1 - e^2)\int (1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2} dB \tag{15}$$

elde edilir. İntegral değeri, e^2'nin kuvvetlerine seri açılımla ifade edilebilir. Bunun için

$$(1-x)^n = 1 - \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 - \binom{n}{3} x^3 + \ldots \tag{16}$$

seri açılımı kullanılır. Böylece (15)'de ki integral içindeki değer

$$(1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-3/2}{n} (-1)^n e^{2n} \sin^{2n} B \tag{17}$$

şeklinde yazılır. Bu seri $e^2<1$ için yakınsaktır. (17) değeri (15)'de yerine yazılırsa

$$G = a(1 - e^2) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-3/2}{n} (-1)^n e^{2n} \int \sin^{2n} B dB \tag{18}$$

elde edilir. Burada $\int \sin^{2n} B dB$ 'nin değeri

$$\int \sin^{2n} B dB = -\frac{1}{2n}\sin^{2n-1}B\cos B + \frac{2n-1}{2n}\int \sin^{2n-2} B dB \tag{19}$$

dir. Bu eşitlik

$$\int \sin^{2n} B dB = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(B - \sin B\cos B\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\sin^{2k} B\right) \tag{20}$$

şeklinde yazılır. Burada n!! çift faktöriyel değeri

$$\begin{aligned}&\text{n ift sayı ise; } n!! = n(n-2)(n-4)(n-6).....4.2\\ &\text{n tek sayı ise; } n!! = n(n-2)(n-4)(n-6).....3.1\end{aligned} \tag{21}$$

dir. Böylece (20) eşitliği , polinom katsayıları olarak yazılmak istenirse

$$\begin{aligned}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} &= \binom{n-1/2}{n} = (-1)^n\binom{-1/2}{n}\\ \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} &= \binom{k+1/2}{k}^{-1} = (-1)^k\binom{-3/2}{k}^{-1}\end{aligned} \tag{22}$$

çift faktöriyel değerleri kullanılarak

$$G = a(1-e^2)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-3/2}{n}e^{2n}\binom{-1/2}{n}\left(B - \sin B\cos B\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{-3/2}{k}^{-1}\sin^{2k} B\right) \tag{23}$$

elde edilir. Bu denklemde

$$\binom{-3/2}{n} = \binom{-1/2}{n}(2n+1) \tag{24}$$

eşitliği dikkate alınarak ve

$$\begin{aligned}d_n &= \binom{-1/2}{n}\\ k_k &= (-1)^k\binom{-3/2}{k}^{-1}\end{aligned} \tag{25}$$

kısaltmaları kullanılırsa meridyen yayı uzunluğunun genel denklemi

$$G = a(1-e^2)\sum_{n=0}^{\infty} d_n^2 (2n+1) e^{2n} (B - \sin B \cos B \sum_{k=0}^{n-1} k_k \sin^{2k} B) \tag{26}$$

elde edilir. Burada d_n ve k_k katsayıları kullanımı kolaylaştırmak için Rekursion formülleriyle

$$\begin{aligned}
&d_{n+1} = -d_n \frac{2n+1}{2n+2} \\
&d_0 = 1,\ d_1 = -\frac{1}{2},\ d_2 = \frac{3}{8},\ d_3 = -\frac{5}{16} \\
&k_{k+1} = k_k \frac{2k+2}{2k+3} \\
&k_0 = 1,\ k_1 = \frac{2}{3},\ k_2 = \frac{8}{15},\ k_3 = \frac{16}{35}
\end{aligned} \tag{27}$$

ifade edilir. (26) formülünü programlama açısından daha kolay ve kullanılışlı hale getirmek için e^2'ye bağlı E, e^2 ve B'ye bağlı E_B katsayısı

$$\begin{aligned}
&E(e^2) = \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \sum_{n=3}^{\infty} d_n^2 (2n+1) e^{2n} \\
&E_B(e^2, B) = \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}(1 + \frac{2}{3}\sin^2 B)e^4 + \sum_{n=3}^{\infty} d_n^2 (2n+1) e^{2n} \sum_{k=0}^{n-1} k_k \sin^{2k} B
\end{aligned} \tag{28}$$

tanımlanır. Ayrıca ekvatorun eğrilik yarıçapı $M_0=a(1-e^2)$ olarak tanımlanırsa basitleştirilmiş meridyen yayı uzunluğu

$$G = M_0(1+E)B - M_0 \frac{1}{2}\sin(2B)E_B \tag{29}$$

elde edilir. (29)'ün ters işlemi yani G' den B' nin hesabı

$$
\begin{aligned}
B_{i+1} &= \frac{G}{M_0(1+E)} + \sin(2B_i)\frac{E_B(B_{i-1})}{2(1+E)} \\
B_0 &= 0,\ B_1 = \frac{G}{M_0(1+E)},\ E_B(B_0) = E
\end{aligned} \tag{30}
$$

iterasyon işlemiyle elde edilir (Klotz, 1993).

2.2.1.1. Coğrafi Koordinatlardan Gauss-Krüger Koordinatlarının Hesabı

(B,L) koordinatlarından (x,y)'in hesabı için, z=x+iy kompleks meridyen mesafesinin hesaplanması gerekir. z' in hesabı için, B elipsoid enlemine karşılık gelen Φ kompleks jeodezik enleminin bilinmesi gerekir. Bilinen (B,L)'den dolayı ψ olduğundan, ψ'den Φ'ye oradan da z' e dönüşüm için

$$
\begin{aligned}
&\sin\Phi_{i+1} = \tanh(\psi + e\ \mathrm{arctanh}(e \sin\Phi_i)),\quad \Phi_0 = 0 \\
&z = M_0(1+E)\Phi - M_0\frac{1}{2}\sin(2\Phi)E_\Phi(\Phi)
\end{aligned} \tag{31}
$$

iterasyon işlemiyle tasvir denklemi elde edilir. Burada kompleks bir sayının sinüs, tanh, arctanh ve arcsin için

$$
\begin{aligned}
&\sin(\alpha + i\beta) = \sin\alpha \cosh\beta + i\cos\alpha \sinh\beta \\
&\tanh(\alpha + i\beta) = J\sinh2\alpha + iJ\sin2\beta \\
&J = (\cosh2\alpha + \cos2\beta)^{-1} \\
&\mathrm{arctanh}(\alpha + i\beta) = \frac{1}{2}\ln\frac{U}{V} + \frac{i}{2}\arctan\left(\frac{2\beta}{1-\beta^2-\alpha^2}\right) \\
&\arcsin(\alpha + i\beta) = \arcsin(U - V) + i\ln(U + V + \sqrt{(U+V)^2 - 1}) \\
&U = \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha+1)^2 + \beta^2} \\
&V = \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha-1)^2 + \beta^2}
\end{aligned} \tag{32}
$$

kullanılır (Klotz, 1993).

2.2.1.2. Gauss-Krüger Koordinatlarından Coğrafi Koordinatların Hesabı

(x,y) koordinatlarından bilinen z kompleks değeri olduğundan Φ kompleks değerine (29)'den ve Φ'den ψ'ye dönüşüm için

$$\Phi_{i+1} = \frac{z}{M_0(1+E)} + \sin(2\Phi_i)\frac{E_\Phi(\Phi_{i-1})}{2(1+E)}$$
$$\psi = \operatorname{arctanh}(\sin\Phi) - e\,\operatorname{arctanh}(e\sin\Phi) \qquad (33)$$

tasvirin genel denklemi elde edilir. $\psi=q+i\ell$ kompleks izometrik enleminden (B,L)'ye geçilmesi gerekir. q' dan B' nin hesabı için (13) kullanılır (Klotz, 1993).

3. SAYISAL UYGULAMA

Yöntemler QuickBasic 7.0 programlama dili ile programlaştırılarak her yöntem kendi ismiyle oluşturulan alt programlarda (sub) hesaplanmıştır. Hesaplamalarda kullanılan değerler çift incelikli (defdbl) alınarak tüm yöntemlerde aynı incelikle çalışılmıştır. Yöntemler arasında irdeleme, (B,ℓ)'den (x,y) hesabında ve bu hesabın ters dönüşümü olan (x,y)'den (B,ℓ) hesabında yapılmıştır.

(B,ℓ)'den (x,y) hesabında; B enlemi Türkiye enlemlerinin ortalaması B=39° sabit bir değer, ℓ boylam farkı ise başlangıç meridyeninden itibaren 30′ aralıklarla ℓ=30° boylamına kadar değişken alındı. Böylece B ve ℓ değerleri belliyken (x,y) değerleri elde edildi. Hesaplanan (x,y) değerleri Çizelge 2'de gösterilmiştir.

(x,y)'den (B,ℓ) hesabında; x değeri B=39° enlemine karşılık gelen meridyen yayı uzunluğuna yakın sabit bir değer (x=4320000m), y değeri ise başlangıç meridyeni üzerinden yani y=0 dan başlayarak 50km aralıklarla 2000km kadar değişken alındı. Böylece x ve y değerleri belliyken (B,ℓ) değerleri elde edildi. Hesaplanan (B,ℓ) değerleri Çizelge 3'de gösterilmiştir.

Çizelge 2 ve Çizelge 3' de Mittermayer ve Klotz yöntemlerinin haricinde, günümüzde kullanılan yöntemlerde (tek ve çift değişkenli kuvvet serileri) gösterilmiştir. Böylece Mittermayer ve Klotz yöntemlerinin bu yöntemlerle aralarındaki farklar çizelgelerde gösterilmiştir.

Çizelge 2. B=39° sabit ve L 0°≤L≤30° aralığında 30' dakika farklarla değişken alınarak, elde edilen (x,y) koordinatları

	Tek Değşk. Kuvvet Serileri		Çift Değşk. Kuvvet Serileri		Mittermayer yöntemi		Klotz yöntemi	
ℓ	x	y	x	y	x	y	x	y
0°	4318576,7951	0,0000	4318576,7951	0,0000	4318576,7951	0,0000	4318576,7951	0,0000
30'	4318695,7374	43315,2654	4318695,7374	43315,2654	4318695,7374	43315,2654	4318695,7374	43315,2654
1°	4319052,5882	86631,2247	4319052,5882	86631,2247	4319052,5882	86631,2247	4319052,5883	86631,2247
1°30'	4319647,4195	129948,5710	4319647,4195	129948,5710	4319647,4195	129948,5710	4319647,4196	129948,5710
2°	4320480,3511	173267,9963	4320480,3510	173267,9964	4320480,3511	173267,9963	4320480,3512	173267,9964
2°30'	4321551,5509	216590,1911	4321551,5506	216590,1913	4321551,5509	216590,1911	4321551,5510	216590,1911
3°	4322861,2348	259915,8430	4322861,2340	259915,8436	4322861,2348	259915,8430	4322861,2349	259915,8430
3°30'	4324409,6667	303245,6371	4324409,6647	303245,6385	4324409,6667	303245,6371	4324409,6668	303245,6371
4°	4326197,1588	346580,2546	4326197,1544	346580,2573	4326197,1588	346580,2546	4326197,1589	346580,2546
4°30'	4328224,0714	389920,3726	4328224,0625	389920,3778	4328224,0714	389920,3726	4328224,0715	389920,3726
5°	4330490,8132	433266,6635	4330490,7964	433266,6725	4330490,8132	433266,6634	4330490,8133	433266,6635
5°30'	4332997,8413	476619,7941	4332997,8116	476619,8091	4332997,8413	476619,7940	4332997,8413	476619,7940
6°	4335745,6612	519980,4253	4335745,6114	519980,4493	4335745,6612	519980,4251	4335745,6613	519980,4251
6°30'	4338734,8272	563349,2112	4338734,7469	563349,2483	4338734,8272	563349,2108	4338734,8273	563349,2108
7°	4341965,9424	606726,7985	4341965,8173	606726,8544	4341965,9424	606726,7979	4341965,9425	606726,7979
7°30'	4345439,6587	650113,8262	4345439,4698	650113,9083	4345439,6587	650113,8252	4345439,6587	650113,8252
8°	4349156,6772	693510,9243	4349156,3993	693511,0426	4349156,6771	693510,9228	4349156,6772	693510,9229
8°30'	4353117,7481	736918,7138	4353117,3489	736918,8808	4353117,7480	736918,7115	4353117,7480	736918,7116
9°	4357323,6712	780337,8055	4357323,1093	780338,0376	4357323,6710	780337,8021	4357323,6711	780337,8022
9°30'	4361775,2959	823768,7996	4361774,5195	823769,1172	4361775,2956	823768,7947	4361775,2956	823768,7948
10°	4366473,5213	867212,2848	4366472,4663	867212,7137	4366473,5207	867212,2779	4366473,5208	867212,2779
10°30'	4371419,2966	910668,8378	4371417,8842	910669,4099	4371419,2958	910668,8281	4371419,2958	910668,8281
11°	4376613,6212	954139,0225	4376611,7560	954139,7770	4376613,6200	954139,0089	4376613,6201	954139,0090
11°30'	4382057,5451	997623,3889	4382055,1122	997624,3740	4382057,5433	997623,3703	4382057,5434	997623,3704
12°	4387752,1689	1041122,4729	4387749,0313	1041123,7468	4387752,1663	1041122,4478	4387752,1664	1041122,4478
12°30'	4393698,6443	1084636,7953	4393694,6397	1084638,4282	4393698,6406	1084636,7615	4393698,6406	1084636,7616
13°	4399898,1739	1128166,8606	4399893,1118	1128168,9368	4399898,1687	1128166,8157	4399898,1687	1128166,8158
13°30'	4406352,0122	1171713,1570	4406345,6699	1171715,7765	4406352,0049	1171713,0978	4406352,0050	1171713,0979
14°	4413061,4652	1215276,1547	4413053,5842	1215279,4362	4413061,4552	1215276,0774	4413061,4553	1215276,0775
14°30'	4420027,8910	1258856,3057	4420018,1728	1258860,3890	4420027,8774	1258856,2054	4420027,8775	1258856,2056
15°	4427252,7002	1302454,0426	4427240,8020	1302459,0917	4427252,6819	1302453,9135	4427252,6819	1302453,9136
15°30'	4434737,3558	1346069,7776	4434722,8856	1346075,9839	4434737,3313	1346069,6126	4434737,3313	1346069,6127
16°	4442483,3740	1389703,9021	4442465,8857	1389711,4879	4442483,3413	1389703,6926	4442483,3414	1389703,6927
16°30'	4450492,3239	1433356,7852	4450471,3122	1433366,0079	4450492,2810	1433356,5207	4450492,2810	1433356,5208
17°	4458765,8287	1477028,7729	4458740,7228	1477039,9294	4458765,7725	1477028,4410	4458765,7726	1477028,4411
17°30'	4467305,5651	1520720,1874	4467275,7234	1520733,6185	4467305,4921	1520719,7732	4467305,4922	1520719,7733
18°	4476113,2643	1564431,3257	4476077,9677	1564447,4217	4476113,1701	1564430,8115	4476113,1701	1564430,8116
18°30'	4485190,7120	1608162,4587	4485149,1571	1608181,6647	4485190,5911	1608161,8235	4485190,5912	1608161,8237
19°	4494539,7488	1651913,8303	4494491,0415	1651936,6525	4494539,5947	1651913,0494	4494539,5947	1651913,0496
19°30'	4504162,2708	1695685,6561	4504105,4181	1695712,6684	4504162,0753	1695684,7005	4504162,0754	1695684,7007
20°	4514060,2296	1739478,1224	4513994,1325	1739509,9733	4514059,9830	1739476,9580	4514059,9830	1739476,9582
20°30'	4524235,6328	1783291,3850	4524159,0780	1783328,8057	4524235,3233	1783289,9719	4524235,3233	1783289,9721
21°	4534690,5446	1827125,5679	4534602,1958	1827169,3804	4534690,1580	1827123,8600	4534690,1580	1827123,8603
21°30'	4545427,0858	1870980,7625	4545325,4753	1871031,8885	4545426,6051	1870978,7062	4545426,6052	1870978,7064
22°	4556447,4344	1914857,0259	4556330,9536	1914916,4963	4556446,8394	1914854,5590	4556446,8394	1914854,5593
22°30'	4567753,8259	1958754,3800	4567620,7158	1958823,3454	4567753,0926	1958751,4310	4567753,0926	1958751,4313
23°	4579348,5537	2002672,8099	4579196,8948	2002752,5512	4579347,6536	2002669,2965	4579347,6536	2002669,2968
23°30'	4591233,9697	2046612,2629	4591061,6718	2046704,2032	4591232,8690	2046608,0907	4591232,8690	2046608,0909
24°	4603412,4843	2090572,6467	4603217,2754	2090678,3640	4603411,1434	2090567,7076	4603411,1434	2090567,7079
24°30'	4615886,5669	2134553,8285	4615665,9827	2134675,0685	4615884,9393	2134547,9993	4615884,9393	2134547,9996
25°	4628658,7465	2178555,6332	4628410,1183	2178694,3238	4628656,7779	2178548,7735	4628656,7778	2178548,7738
25°30'	4641731,6120	2222577,8420	4641452,0549	2222736,1083	4641729,2387	2222569,7924	4641729,2387	2222569,7928
26°	4655107,8124	2266620,1912	4654794,2131	2266800,3713	4655104,9605	2266610,7710	4655104,9605	2266610,7714
26°30'	4668790,0574	2310682,3702	4668439,0616	2310887,0321	4668786,6411	2310671,3751	4668786,6411	2310671,3755
27°	4682781,1178	2354764,0201	4682389,1168	2354995,9799	4682777,0376	2354751,2196	4682777,0376	2354751,2200
27°30'	4697083,8257	2398864,7322	4696646,9431	2399127,0726	4697078,9668	2398849,8667	4697078,9668	2398849,8671
28°	4711701,0751	2442984,0464	4711215,1528	2443280,1370	4711695,3052	2442966,8240	4711695,3051	2442966,8245
28°30'	4726635,8220	2487121,4491	4726096,4064	2487454,9675	4726628,9889	2487101,5426	4726628,9888	2487101,5431
29°	4741891,0853	2531276,3719	4741293,4119	2531651,3258	4741883,0143	2531253,4149	4741883,0142	2531253,4154
29°30'	4757469,9465	2575448,1896	4756808,9256	2575868,9403	4757460,4376	2575421,7726	4757460,4375	2575421,7730
30°	4773375,5506	2619636,2183	4772645,7515	2620107,5057	4773364,3754	2619605,8845	4773364,3753	2619605,8850

Çizelge 3. x=4320000m sabit ve y koordinatı 0≤y≤2000km aralığında 50km aralıklarla değişken alınarak, elde edilen (B,ℓ) koordinatları

	Tek Değişkenli Kuvvet Serileri						Çift Değişkenli Kuvvet Serileri					
y	B			ℓ			B			ℓ		
0	39 °	0 '	46,15024 "	0 °	0 '	0,00000 "	39 °	0 '	46,15024 "	0	0 '	0,00000 "
50	39	0	41,00886	0	34	38.12084	39	0	41.00886	0	34	38.12084
100	39	0	25.58696	1	9	15.94667	39	0	25.58696	1	9	15,94667
150	38	59	59.89110	1	43	53.18274	38	59	59.89110	1	43	53.18274
200	38	59	23.93218	2	18	29,53487	38	59	23,93221	2	18	29,53487
250	38	58	37,72553	2	53	4.70958	38	58	37,72564	2	53	4,70958
300	38	57	41.29074	3	27	38.41456	38	57	41,29106	3	27	38,41456
350	38	56	34.65175	4	2	10.35866	38	56	34.65262	4	2	10.35866
400	38	55	17.83679	4	36	40,25239	38	55	17.83873	4	36	40.25246
450	38	53	50.87832	5	11	7.80806	38	53	50.88224	5	11	7.80828
500	38	52	13.81303	5	45	32.73998	38	52	13,82041	5	45	32,74063
550	38	50	26,68171	6	19	54,76483	38	50	26.69482	6	19	54,76627
600	38	48	29.52940	6	54	13,60177	38	48	29,55146	6	54	13,60469
650	38	46	22,40501	7	28	28,97278	38	46	22,44068	7	28	28,97821
700	38	44	5,36168	8	2	40,60270	38	44	5,41723	8	2	40,61234
750	38	41	38.45630	8	36	48,21973	38	41	38,54026	8	36	48,23597
800	38	39	1.74974	9	10	51,55543	38	39	1.87319	9	10	51,58175
850	38	36	15.30666	9	44	50.34487	38	36	15,48400	9	44	50,38616
900	38	33	19,19542	10	18	44,32705	38	33	19,44486	10	18	44,38994
950	38	30	13,48808	10	52	33,24493	38	30	13,83250	10	52	33,33835
1000	38	26	58,26019	11	26	16,84554	38	26	58,72787	11	26	16,98133
1050	38	23	33,59090	11	59	54,88033	38	23	34,21637	11	59	55,07376
1100	38	19	59,56266	12	33	27,10512	38	20	0,38782	12	33	27,37588
1150	38	16	16,26128	13	6	53,28040	38	16	17,33632	13	6	53,65339
1200	38	12	23,77584	13	40	13,17130	38	12	25,16047	13	40	13,67778
1250	38	8	22,19842	14	13	26.54789	38	8	23.96314	14	13	27,22660
1300	38	4	11.62420	14	46	33,18499	38	4	13,85162	14	46	34,08370
1350	37	59	52,15132	15	19	32,86265	37	59	54,93761	15	19	34,03949
1400	37	55	23,88072	15	52	25,36583	37	55	27,33719	15	52	26,89122
1450	37	50	46,91612	16	25	10,48465	37	50	51,17071	16	25	12,44327
1500	37	46	1,36376	16	57	48,01439	37	46	6,56303	16	57	50,50735
1550	37	41	7.33258	17	30	17,75556	37	41	13.64338	17	30	20,90279
1600	37	36	4,93384	18	2	39,51377	37	36	12,54524	18	2	43,45678
1650	37	30	54,28123	18	34	53,09980	37	31	3,40666	18	34	58,00472
1700	37	25	35,49061	19	6	58,32954	37	25	46,36988	19	7	4,39039
1750	37	20	8,68006	19	38	55,02404	37	20	21,58166	19	39	2,46622
1800	37	14	33,96970	20	10	43,00921	37	14	49,19309	20	10	52,09363
1850	37	8	51,48164	20	42	22,11588	37	9	9,35964	20	42	33,14322
1900	37	3	1,33988	21	13	52,17967	37	3	22,24109	21	14	5,49499
1950	36	57	3,67020	21	45	13,04082	36	57	28,00177	21	45	29,03879
2000	36	50	58,60014	22	16	24,54406	36	51	26,81021	22	16	43,67431

Çizelge 3'in devamı

	Mittermayer yöntemi						Klotz yöntemi					
y	B			ℓ			B			ℓ		
0	39 °	0 '	46,15024 "	0 °	0 '	0,00000 "	39 °	0 '	46,15024 "	0 °	0 '	0,00000 "
50	39	0	41.00886	0	34	38.12084	39	0	41,00886	0	34	38,12084
100	39	0	25,58696	1	9	15,94667	39	0	25,58696	1	9	15,94667
150	38	59	59.89110	1	43	53,18274	38	59	59,89110	1	43	53,18274
200	38	59	23.93218	2	18	29.53487	38	59	23,93218	2	18	29,53487
250	38	58	37.72553	2	53	4,70958	38	58	37,72553	2	53	4,70958
300	38	57	41.29074	3	27	38,41456	38	57	41,29074	3	27	38,41456
350	38	56	34.65175	4	2	10,35866	38	56	34,65175	4	2	10,35866
400	38	55	17,83679	4	36	40,25239	38	55	17,83679	4	36	40,25239
450	38	53	50,87828	5	11	7,80806	38	53	50,87828	5	11	7,80806
500	38	52	13.81296	5	45	32.73998	38	52	13,81296	5	45	32,73998
550	38	50	26,68164	6	19	54,76487	38	50	26,68164	6	19	54,76487
600	38	48	29,52929	6	54	13,60181	38	48	29,52929	6	54	13,60181
650	38	46	22.40490	7	28	28.97281	38	46	22,40490	7	28	28.97281
700	38	44	5,36150	8	2	40.60284	38	44	5.36150	8	2	40,60284
750	38	41	38.45609	8	36	48.21998	38	41	38,45609	8	36	48,21998
800	38	39	1.74949	9	10	51.55586	38	39	1,74949	9	10	51,55586
850	38	36	15,30630	9	44	50,34563	38	36	15,30630	9	44	50,34563
900	38	33	19.19495	10	18	44.32835	38	33	19,19495	10	18	44,32835
950	38	30	13.48744	10	52	33.24702	38	30	13.48744	10	52	33.24702
1000	38	26	58,25936	11	26	16,84892	38	26	58,25936	11	26	16,84889
1050	38	23	33.58982	11	59	54.88555	38	23	33,58982	11	59	54,88555
1100	38	19	59,56126	12	33	27,11311	38	19	59,56126	12	33	27.11311
1150	38	16	16.25945	13	6	53.29231	38	16	16,25945	13	6	53,29231
1200	38	12	23,77336	13	40	13.18883	38	12	23,77336	13	40	13,18883
1250	38	8	22,19514	14	13	26,57320	38	8	22,19514	14	13	26,57320
1300	38	4	11,61984	14	46	33.22106	38	4	11,61984	14	46	33.22106
1350	37	59	52,14552	15	19	32,91330	37	59	52,14552	15	19	32,91330
1400	37	55	23,87298	15	52	25,43606	37	55	23,87298	15	52	25,43606
1450	37	50	46,90579	16	25	10.58088	37	50	46,90579	16	25	10,58088
1500	37	46	1.35005	16	57	48,14482	37	46	1,35005	16	57	48,14482
1550	37	41	7,31436	17	30	17,93048	37	41	7,31436	17	30	17,93048
1600	37	36	4,90979	18	2	39,74611	37	36	4,90979	18	2	39,74611
1650	37	30	54,24955	18	34	53,40565	37	30	54,24955	18	34	53,40565
1700	37	25	35,44914	19	6	58,72874	37	25	35,44914	19	6	58,72874
1750	37	20	8,62598	19	38	55,54090	37	20	8,62598	19	38	55,54090
1800	37	14	33,89953	20	10	43,67334	37	14	33,89953	20	10	43,67330
1850	37	8	51,39107	20	42	22,96314	37	8	51,39107	20	42	22,96314
1900	37	3	1,22357	21	13	53,25334	37	3	1,22357	21	13	53,25334
1950	36	57	3,52159	21	45	14,39266	36	57	3,52159	21	45	14,39266
2000	36	50	58,41125	22	16	26,23577	36	50	58,41125	22	16	26,23577

4. SONUÇLAR

Türkiye'de UTM sistemine geçiş için kullanılan Gauss-Krüger düzlem koordinatları ile elipsoid coğrafi koordinatlar arasındaki dönüşüm için tek ve çift değişkenli kuvvet serileri yerine Mittermayer ve Klotz yöntemleri kullanılabilir.

Türkiye'nin batı ve doğu boylamları arasındaki boylam farkı $\ell=18°30'$ olarak düşünülürse; Klotz ve Mittermayer yöntemleri kullanılarak ülkemiz L_0 başlangıç meridyenine göre tek bir düzlem olarak elde edilebilir. UTM koordinatlarına (sağa, yukarı) geçmek istenirse $\ell=18°30'$ boylam farkına karşılık gelen m_0 ölçek faktörünün hesaplanması gerekir. Böylece Türkiye'de dilim dönüşümü problemi ortadan kalkabilir ve birden fazla dilime düşen uzun projelerde hesap yükü azaltılabilir.

5. KAYNAKLAR

Grossmann, W. 1976 , Geodätische Rechnungen und Abbildungen in der Landesvermessung, Stuttgart.

Klotz, J. 1993, Eine Analytische Lösung der Gauβ-Krüger-Abbildung, ZFV, 3, 1993, 106-116.

Mittermayer, E. 1993, Die Gauβschen Koordinaten in spherischer und ellipsoidischer Approximation/Konforme Abbildung, ZFV, 7, 1993, 345-356.

Mittermayer, E. 1995, Mathematical Geodesy, özel notlar TU – Berlin.

Özbenli, E. 1982 , Elipsoidin Küreye Konform Tasviri, KTÜ Basımevi, Trabzon

Yıldırım, F. 1998, Gauss-Kr ger Tasvirinde z m Y ntemlerinin İncelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.