ÜÇ BOYUTLU BENZERLİK DÖNÜŞÜMÜ İÇİN KULLANILAN BURSA-WOLF VE MOLODENSKY-BADEKAS MODELLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

Ş. Hakan KUTOĞLU
Çetin MEKİK
Eray KÖKSAL

ÖZET:

İki jeosentrik elipsoidal koordinat sistemi arasında datum dönüşümü, temel olarak 3 öteleme, 3 dönüklük ve ölçekten oluşan 7 parametreli benzerlik dönüşümüyle sağlanır. Böyle bir dönüşümü gerçekleştirmek için çok sayıda yaklaşım sözkonusudur. Ancak sağladıkları sonuçlar ve uygulanmalarındaki kolaylıklar nedeniyle, genelikle Bursa-Wolf ve Molodensky-Badekas modelleri tercih edilir. Bu iki model, ötelemeler ve onlara ait k.o.h'lar dışında aynı sonuçları üretmektedir. Ötelemelerdeki farklar son derece büyük olduğundan, dönüşüm modellerinin sadece birinden hesaplanan değerler gerçekçi olabilir. Belirlenen parametrelerin, daha sonra başka uygulamacılar tarafından çeşitli amaçlarla kullanılabileceği sorumluluğunu taşıyarak, uygulamalarda daha gerçekçi ötelemeler üreten modelin tercih edilmesi yerinde olacaktır. Bu bağlamda, sözkonusu farklılıkların nedenleri ve hangi modelin daha gerçekçi öteleme değerleri ürettiği araştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar, Molodensky-Badekas modelindeki öteleme parametrelerinin, ölçek ve dönüklüklerden bağımsız belirlenmeleri nedeniyle, daha gerçekçi olduklarını göstermiştir.

1. Giriş

GPS tekniğiyle belirlenen jeodezik ağların, ülke nirengi ağlarına bağlanmasında, Bursa-Wolf ve Molodensky-Badekas en sık kullanılan dönüşüm modelleridir. İki model arasındaki tek fark, Bursa-Wolf modelinde doğrudan doğruya verilen koordinatlar kullanılırken, Molodensky-Badekas modelinde birinci sistem koordinatlarının ortak noktaların ağırlık merkezi koordinatlarına göre ötelenmesidir. Sözkonusu modellerle dönüştürülen koordinatlar birbirinin aynı olmasına karşın, parametre hesabı sonrası bulunan ötelemeler ve onların k.o.h.'ları son derece farklıdır (King ve dig., 1987). Jeodezik amaçlı çoğu uygulamada, dönüştürülmüş koordinatların doğruluğu yeterli olmaktadır. Ancak, sadece öteleme değerlerinin kullanıldığı pratik amaçlı bazı uygulamalar da sözkonusu olabilir. Böyle bir uygulamada, doğru sonuçlara varabilmek için eldeki parametrelerin gerçeğe olabildiğince yakın olması gerekir. Halbuki bu iki modelden bulunan öteleme değerlerinden, sadece birinin gerçeği yansıtması mümkündür.

Diğer tüm çalışmalarda olduğu gibi, dönüşüm hesabında da amaç, ilgili tüm disiplinlerdeki uygulamacıların kuşku duymadan kullanabileceği, doğru parametrelerin belirlenmesi olmalıdır. O takdirde, her ne kadar bu iki model aynı dönüştürülmüş koordinatları sağlasa da, en doğru öteleme parametrelerinin belirlendiği modelin seçilmesi, belirli bir standart oluşturulması bakımından yerinde olacaktır.

Bu çalışmada yukarıda tanımlanan amaç doğrultusunda, Bursa-Wolf ve Molodensky-Badekas dönüşüm modellerinin farklı öteleme değerleri vermesinin nedenleri ve hangi modele ait ötelemelerin daha gerçekçi olduğu araştırılmıştır.

2. Bursa-Wolf ve Molodensky Badekas Modelleri

7-Parametreli Benzerlik Dönüşümü için Bursa-Wolf modelinin genel bağıntısı;

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} t_X \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} + (1+k)\underline{R} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_1 \tag{1}$$

ile verilir (Bursa 1966, Wolf 1963). Burada R dönme matrisi;

$$\underline{R} = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_Z & -\varepsilon_Y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y & -\varepsilon_X & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

ile tanımlıdır. Eşitlikte geçen parametrelerden t_X, t_Y, t_Z eksenler boyunca ötelemeler, ε_X, ε_Y, ε_Z eksenler etrafındaki dönüklükler ve k ölçek faktörüdür.

Ortak noktalardan yararlanarak dönüşüm parametrelerinin hesaplanabilmesi amacıyla, koordinat sistemlerinden birisi hatalı varsayılıp (1) eşitliği Taylor serisine açıldığında ve gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$\underline{V} = \underline{A}\,\underline{x} - \underline{l} \tag{3}$$

biçiminde dolaylı ölçüler dengelemesinin fonksiyonel modeli elde edilir (Şimşek, 1995).

Burada dengelemenin katsayılar matrisi;

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -Z_1 & Y_1 & X_1 \\ 0 & 1 & 0 & Z_1 & 0 & -X_1 & Y_1 \\ 0 & 0 & 1 & -Y_1 & X_1 & 0 & Z_1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

şeklinde olacaktır.

Molodensky-Badekas modelinde ise birinci sistem koordinatları, ortak noktaların ağırlık merkezine göre ötelenirler. Buna göre genel eşitlik;

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} + (1+k)\underline{R} \begin{bmatrix} X_1 - X_0 \\ Y_1 - Y_0 \\ Z_1 - Z_0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

ile tanımlanır. Bu durumda Molodenky-Badekas için oluşturulacak fonksiyonel modelde katsayılar matrisi;

$$X_1 - X_0 = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \tag{6}$$

gösterimiyle;

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -W & V & U \\ 0 & 1 & 0 & W & 0 & -U & V \\ 0 & 0 & 1 & -V & U & 0 & W \end{bmatrix} \tag{7}$$

olarak elde edilir.

(4) ve (7) ile belirlenen katsayılar matrislerlerine göre, $\underline{N}=\underline{A}^T\underline{A}$ ile tanımlanan dengelemenin normal denklemler matrisi Bursa-Wolf modeli için (8), Molodensky-Badekas için (9)'daki gibi olur.

$$\begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 & -[Z] & [Y] & [X] \\ 0 & n & 0 & [Z] & 0 & -]X] & [Y] \\ 0 & 0 & n & -[Y] & [X] & 0 & [Z] \\ 0 & [Z] & -[Y] & [Z^2+Y^2] & -[YX] & -[ZX] & 0 \\ -[Z] & 0 & [X] & -[XY] & [Z^2+X^2] & -[ZY] & 0 \\ [Y] & -[X] & 0 & -[XZ] & -[YZ] & [Y^2+X^2] & 0 \\ [X] & [Y] & [Z] & 0 & 0 & 0 & [X^2+Y^2+Z^2] \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 & -[Z]+nZ_0 & [Y]-nY_0 & [X]-nX_0 \\ 0 & n & 0 & [Z]-nZ_0 & 0 & -[X]+nX_0 & [Y]-nY_0 \\ 0 & 0 & n & -[Y]+nY_0 & [x]-nX_0 & 0 & [Z]-nZ_0 \\ 0 & [Z]-nZ_0 & -[Y]+nY_0 & [(Z-Z_0)^2+(Y-Y_0)^2] & -[(Y-Y_0)(X-X_0)] & -[(Z-Z_0)(X-X_0)] & 0 \\ -[Z]+nZ_0 & 0 & [X]-nX_0 & -[(X-X_0)(Y-Y_0)] & [(Z-Z_0)^2+(X-X_0)^2] & -[(Z-Z_0)(Y-Y_0)] & 0 \\ [Y]-nY_0 & -[X]+nX_0 & 0 & -[(X-X_0)(Z-Z_0)] & -[(Y-Y_0(Z-Z_0)] & [(Y-Y_0)^2+(X-X_0)^2] & 0 \\ [X]-nX_0 & [Y]-nY_0 & [Z]-nZ_0 & 0 & 0 & 0 & [(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2+(Z-Z_0)^2] \end{bmatrix} \quad (9)$$

(9) normal denklemler matrisinde geçen [X], [Y], [Z], n ortak nokta sayısı olmak üzere, sırasıyla nX0, nY0 ve nZ0'a eşit olacağından, matris yeniden düzenlenerek Molodensky-Badekas için;

$$\begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [(Z-Z_0)^2+(Y-Y_0)^2] & -[(Y-Y_0)(X-X_0)] & -[(Z-Z_0)(X-X_0)] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -[(X-X_0)(Y-Y_0)] & [(Z-Z_0)^2+(X-X_0)^2] & -[(Z-Z_0)(Y-Y_0)] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -[(X-X_0)(-Z_0)] & -[(Y-Y_0)(Z-Z_0)] & [(Y-Y_0)^2+(X-X_0)^2] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2+(Z-Z_0)^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

elde edilir.

Bursa-Wolf modeli için çıkarılan normal denklemler matrisi incelendiğinde, ötelemelere ait satırlarda dönüklük ve ölçeğe karşılık gelen elemanların son derece büyük değerler alacağı açıktır. Bu elemanlar, normal denklemler matrisinin tersi alınarak Q_{xx}

bilinmeyenlerin kofaktörler matrisinin hesaplanması sırasında yüksek korelasyona neden olurlar ve bu nedenle de matris dolu bir yapıya sahip olur. Buna karşın, Molodensky-Badekas'da aynı elemanların sıfır olduğu (10)'dan görülmektedir. Dolayısıyla Q_{xx} hesabında ötelemelerin diğer parametrelerle korelasyonu ihmal edilebilir düzeyde kalacaktır. Sözkonusu korelasyonları;

$$ri = \frac{q_{XiYi}}{q_{Xi}\, q_{Yi}}$$

bağıntısından hesaplamak mümkündür.

3. Uygulama

Uygulama için, İstanbul Teknik Üniversitesi'nin İzmir ve Zonguldak'ta, Harita Genel Komutanlığı'nın Ankara'da oluşturduğu ağlar kullanılmıştır. Ülke nirengi ağına ait elipsoidal yükseklikler bilinmediğinden, dönüşüm esnasında noktalara ait nivelman yükseklikleri ülke ağının elipsoidal yüksekliklerine eşit varsayılmıştır. Bu yolla her bir ağdan, Bursa-Wolf ve Molodensky-Badekas modelleriyle bulunan öteleme parametrelerinin birbirinden ne kadar farklı olduğu Tablo1 ve 2'de açıkça görülmektedir.

Tablo 1: H=hED Varsayımıyla Molodensky-Badekas Modeli'nden

Hesaplanan Parametreler

Parametre	İzmir	Zonguldak	Ankara
t_X (m)	90.020±0.007	89.584±0.014	88.305±0.000
t_Y (m)	92.846±0.007	91.142±0.014	91.182±0.000
t_Z (m)	131.680±0.007	128.977±0.014	128.230±0.000
ε_X (≤)	-0.966±0.084	22.183±3.316	-1.597±0.001
ε_Y (≤)	3.126±0.106	-21.042±2.307	3.777±0.001
ε_Z (≤)	0.620±0.078	-7.957±1.862	0.490±0.001
k (ppm)	-4.809±0.326	9.686±2.062	3.381±0.003
m_0 (m)	±0.0179	±0.0353	±0.0002

Tablo 2: $H=h_{ED}$ Varsayımıyla Bursa-Wolf Modeli'nden Hesaplanan Parametreler

Parametre	İzmir	Zonguldak	Ankara
t_X (m)	164.359±2.655	-281.150±27.378	142.331±0.036
t_Y (m)	135.672±2.630	-542.148±103.562	123.588±0.039
t_Z (m)	72.507±3.020	774.479±85.934	18.168±0.024
ε_X (″)	-0.966±0.084	22.183±3.316	-1.597±0.001
ε_Y (″)	3.126±0.106	-21.042±2.307	3.777±0.001
ε_Z (″)	0.620±0.078	-7.957±1.862	0.490±0.001
k (ppm)	-4.809±0.326	9.686±2.062	3.381±0.003
m_0 (m)	0.0179	0.0353	0.0002

Bu farklılıkların nedenini ortaya koyabilmek için, öncelikle (8) ve (10) eşitlikleriyle her iki model için oluşturulan dengelemenin normal denklemler matrislerinin tersleri alınarak bilinmeyenlerin kofaktörler matrisleri, sonra da bunlardan yararlanarak (11) eşitliğiyle dönüşüm parametrelerinin korelasyon matrisleri hesaplanmıştır. Buna göre İzmir ağında;

$$\underline{K}_{Mol\text{-}Bad}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0.33 & -0.18 & 0 \\ & & & & 1 & -0.04 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_{Bur\text{-}Wolf}=\begin{bmatrix} 1 & 0.05 & -0.41 & -0.20 & 0.77 & -0.35 & -0.55 \\ & 1 & -0.24 & -0.73 & 0.18 & 0.74 & -0.28 \\ & & 1 & 0.56 & -0.86 & -0.03 & -0.43 \\ & & & 1 & 0.34 & -0.18 & 0 \\ & & & & 1 & -0.04 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Zonguldak ağında;

$$\underline{K}_{Mol\text{-}Bad} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & -0.97 & -0.97 & 0 \\ & & & & 1 & -0.96 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_{Bur\text{-}Wolf} = \begin{bmatrix} 1 & 0.87 & -0.87 & -0.87 & 092 & 0.81 & -0.31 \\ & 1 & -0.98 & -0.99 & 0.97 & 0.98 & -0.05 \\ & & 1 & 0.99 & -0.99 & -0.96 & -0.10 \\ & & & 1 & -0.97 & -0.97 & 0 \\ & & & & 1 & 0.96 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Ankara ağında;

$$\underline{K}_{Mol\text{-}Bad} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0.39 & -0.54 & 0 \\ & & & & 1 & -0.59 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_{Bur\text{-}Wolf} = \begin{bmatrix} 1 & -0.64 & -0.29 & 0.47 & 0.85 & -0.79 & -0.39 \\ & 1 & 0.22 & -0.81 & -0.56 & 0.89 & -0.22 \\ & & 1 & 0.15 & -0.69 & 0.29 & -0.57 \\ & & & 1 & 0.39 & -0.54 & 0 \\ & & & & 1 & -0.59 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

değerleri bulunmuştur. Elde edilen korelasyon matrisleri incelendiğinde, Bursa-Wolf modelinde ötelemelerin özellikle dönüklüklerle olan korelasyonlarının %90'lara ulaştığı görülmektedir. Bu, dönüklükler büyüdükçe ötelemelerin gerçek değerden giderek uzaklaşacağı anlamını taşımaktadır. Oysa Molodensky-Badekas modelinde aynı korelasyonlar sıfıra gitmektedir. Dolayısıyla dönüklükler diğer parametrelerden bağımsız olarak elde edilmekte ve gerçek değere yakınlıkları, sadece ortak noktaların doğruluklarına bağlı olmaktadır.

Bu bağlamda, Bursa-Wolf modeliyle bulunan ötelemeler, iki sistem arasındaki gerçek geometriyi yansıtmaktan uzaktır. Molodensky-Badekas'da ise; ölçek ve dönüklüklerin etkileri ötelemelere yansımadığından gerçeğe daha yakın öteleme değerleri hesaplamak mümkündür. Molodensky-Badekas modeliyle hesaplanan öteleme parametrelerinin daha tutarlı olması da bunun bir ispatıdır (Tablo 1 ve 2).

4. Sonuç

Gerçekleştirilen analizler, Molodensky-Badekas modeliyle bulunacak öteleme parametrelerinin daha gerçekçi olduğunu ortaya koymaktadır. Herhangi bir jeodezik çalışma için belirlenecek dönüşüm parametrelerinin, farklı uygulamacılar tarafından çok çeşitli amaçlarla kullanılabileceği göz önüne alınarak, uygulamada bir standart oluşması bakımından, yukarıdaki değerlendirmeler ışığında Bursa-Wolf yerine Molodensky-Badekas dönüşüm modelinin kullanılması önerilir.

KAYNAKLAR

Australian Surveying and Land Information Group, 2000, http://www.auslig. gov.au/geodesy/datums/smil.htm

Bursa, M., 1966. Fundamentals Of The Theory Of Geometric Satellite Geodesy, Travaux de l'institut Geophsique de l'academie Tehecoslovaque des Sciences

Dana, P.H., 1995, http://www.utexas.edu/depts/grg/gcraft/notes/coordsys/ coordsys. html

Defence Mapping Agency, 1988. Techninal Report, Washington.

Gürkan, O., 1983. Differential Relations Between Earth Fixed Coordinate Systems, IAG Symposium On Geodetic Reference Systems, 15-27 August, Hamburg.

Harvey, B.R., 1986, Transformation of 3D Coordinates, The Australian Surveyor, 33, p. 105-125

Krakiwsky, E.J., Wells, D.E., 1971, Coordinate Systems In Geodesy, Lecture Notes, University Of New Brunswick.

Ring, R.W., Masters, E.G., Rizos, C., Stolz, A., Collins, J., 1987. Surveying With Global Positioning System, Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn.

Şimşek, M., 1995. Uydu Tekniklerinin Ağ Sıklaştırmasında Kullanılabilirliği Üzerine Bir Araştırma, Doktora Tezi, Y.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Vanicek, P. and Krakiwsky, E., 1982. Geodesy: The Concepts, North-Holland Publishing Company, Oxford.

Wolf, H., 1963, Geometric Connection And Re-orientation Of Three Dimensional Triangulation Nets, Bulletin Geodesy, 68, p. 165-169.