

# KARAYOLU VE DEMİRYOLU PROJELERİNDE ORTOMETRİK YÜKSEKLİK HESABI: EN KÜÇÜK KARELER İLE KOLLOKASYON

Ayhan Ceylan<sup>1</sup>, Aydın Üstün<sup>1</sup>, Serkan Doğanalp<sup>1</sup>, H.Bora Gürses<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Selçuk Üniversitesi, Mühendislik Mimarlık Fakültesi, Harita Müh.Bölümü, Konya,  
aceylan@selcuk.edu.tr, austun@selcuk.edu.tr, sdoganalp@selcuk.edu.tr

<sup>2</sup>Selçuk Üniversitesi Fen Bil. Enstitüsü, Konya

## ÖZET

Günümüzde mühendislik hizmetlerine yönelik projelerde nokta yüksekliklerinin veya yükseklik farklarının belirlenmesinde uygulanan en geçerli yöntem GPS/Nivelman tekniğidir. Söz konusu teknik, uygulamada doğrudan doğruya kullanılmayan GPS elipsoidal yüksekliklerinin ortometrik yüksekliklere dönüştürülmesi esasına dayanır. B.Ö.H.H.B.Ü. Yönetmeliğinde bu iki yükseklik sistemi arasındaki dönüşüm için işaret edilen yöntemlerde, elde edilecek sonuçların doğruluğu seçilen dayanak noktalarının ağ içerisindeki konumuna bağlıdır. Karayolu, demiryolu, kanal vb. mühendislik projelerindeki yer kontrol noktaları, genellikle sınırlı (1-2 km) genişlikte şeritvari bir alan içerisinde dağılması nedeniyle çalışma alanı içerisinde sağlıklı bir yüzey modelinin oluşturulmasını güçleştirmektedir. Bu tür şeritvari mühendislik projelerinde, geçki boyunca polinom yüzeyi modeline alternatif olarak ardışık dayanak noktalarından En Küçük Kareler (EKK) yöntemine göre kollokasyon ile geçirilecek polinom eğrisi modeli bir yaklaşım olarak düşünülebilir.

Bu çalışmada, yaklaşık 210 km uzunluğundaki Konya-Polatlı (Ankara) Hızlı Tren Projesine ait GPS/Nivelman verileri En Küçük Kareler ile kollokasyon (EKKK) yöntemini esas alan polinom eğrisi yaklaşımını inceleme amacıyla kullanılmıştır. Projeye ait yer kontrol noktaları, bu çalışmanın amacına uygun olarak dayanak ve kontrol olmak üzere sınıflandırılarak, kontrol noktalarının ortometrik yükseklikleri, farklı dereceden eğri ve yüzey polinomu geçirmek suretiyle elde edilen yerel jeoit modeli yardımıyla hesaplanmıştır. Ayrıca, aynı noktalardaki ortometrik yükseklikler, bu çalışmada önerilen EKKK kollokasyon ile polinom eğrisi yaklaşımı ile hesaplanmıştır. Uygulama alanında dayanak noktalarının yüzeye dağılımı uygun olmadığından yüzey modelinde üst derecelere çıkılamamıştır. 1. ve 2. derece yüzey modelleri ile elde edilen değerler ile gerçek değerler arasındaki farklara ilişkin standart sapma  $\pm 10.0$  cm, eğri yaklaşımında ise daha üst dereceden (6.dereceye kadar) polinomun eğrisi geçirilebilmesine rağmen farklara ilişkin standart sapma  $\pm 7.2$  cm hesaplanmıştır. Diğer yandan, 2. dereceden eğri polinomunu ile EKK göre kollokasyon yaklaşımında ise farklara ait standart sapma  $\pm 1.9$  cm olarak elde edilmiştir.

Anahtar Sözcükler: GPS/GNSS, Nivelman, Mühendislik Ölçmeleri, Kollokasyon, Ortometrik Yükseklik

## ABSTRACT

### ORTHOMETRIC HEIGHT DETERMINATION IN STRIP MAP PROJECTS: COLLOCATION WITH LEAST SQUARES

Today, in engineering projects the current method for determining orthometric heights or height differences at vertical control stations is well-know GPS/leveling technique. This technique is based on the conversion of ellipsoidal heights which they can not been used in the engineering surveys into the orthometric heights. In the Technical Instructions of Large-Scaled Map Production for Turkey, the accuracy of results to be derived from the methods pointed out in the instruction for height transformation between both systems depend on the distributions of reference stations. It is hard or very limited to find this kind of stations within the zone along projects of road, railway, pipeline and etc. In such projects, alternatively a polynomial curve in order to approximate a polynomial surface model can be thought when the distribution of reference stations is poor along the project line.

In this study, GPS/leveling data set of the Konya-Polatlı (Ankara) Fast Train Project of 210 km length was utilized in order to investigate the polynomial approximation based on the least squares collocation technique. The project data set was classified separately as reference and test. The orthometric heights of the test stations were computed from the curve and surface models estimated by the least squares and collocation approximations. The collocation procedure was performed for curve fitting only. Due to uneven distribution of reference stations within the project area, the high degree polynomials show ill-posed results at the test stations. In the surface models with the first- and second-degree, the standart deviation of the agreement is  $\pm 10.0$  cm, whereas the polynomial curve model which can be computed up to 6th degree has given the best result with the standard deviation of  $\pm 7.2$  cm. On the other hand, with the collocation method based on the second-degree polynomial curve, the standard deviation at the test stations was found to be  $\pm 1.9$  cm.

Keywords: GPS/GNSS, Leveling, Survey Engineering, Collocation, Orthometric Height

## 1. GİRİŞ

Konum ölçmelerinde nokta yüksekliklerinin veya yükseklik farklarının belirlenmesi, yatay konum belirlemeye göre kısmen daha zor bir ödevdir. Mühendislik hizmetlerine yönelik projelerde bir Harita Mühendisliği uygulaması olarak yükseklik belirlemeleri için uygulanan yöntemler,

- 1- Geometrik Nivelman
- 2- Trigonometrik Nivelman
- 3- GPS/Nivelman

olarak sıralanmıştır (B.Ö.H.H.B.Ü.Y, 2005). Günümüzde uygulanan en geçerli yöntem GPS/Nivelman tekniğidir (Üstün, 2002). Söz konusu teknik, uygulamada doğrudan doğruya kullanılamayan GPS elipsoid yüksekliklerinin ortometrik yüksekliklere dönüştürülmesi esasına dayanır. B.Ö.H.H.B.Ü. Yönetmeliğinde bu iki yükseklik sistemi arasındaki dönüşüm için aşağıdaki yöntemlerden biriyle oluşturulacak jeoit modeli işaret edilmektedir. Bunlar;

- TG-03 jeoidinin doğrudan kullanılması,
- TG-03 jeoidinin yerel GPS/Nivelman ölçüleriyle güncelleştirilerek kullanılması,
- baz vektörler boyunca elipsoit ve TG-03 jeoit yükseklik farklarından hesaplanacak ortometrik yükseklik farklarının bir nivelman ağı şeklinde dengelenmesi ve
- yerel GPS/Nivelman jeoit modelinin oluşturulmasıdır.

İlki dışında diğer üç yöntemde, sonuçların doğruluğu seçilen dayanak noktaların çalışma sahası içerisindeki konumuna bağlıdır. Öte yandan yukarıda işaret edilen yöntemler belirli bir bölgeye ilişkin topografik haritaların üretimini esas almaktadır. Bu kapsamda gerçekleştirilmiş uygulamalara bakıldığında, yönetmelik hükümlerine uygun davranıldığında istenilen doğruluk ölçütlerinin karşılandığı görülmektedir (Kartal, 2001; Şanlıoğlu vd., 2002; Kılıçoğlu ve Fırat, 2003). Ancak, karayolu, demiryolu, kanal vb. şeritvari mühendislik projelerinde yönetmelikte ifade edilen durumların dışına çıkma zorluğu ile karşılaşılır. Şeritvari uygulamalarda, yükseklik bilgisinin üretilmesi, genellikle sınırlı sayıda tespit edilebilen veya gerektiğinde bir geçki boyunca nivelman yapılarak sıklaştırılmış dayanak noktalarıyla mümkün olabilmektedir. Bu durum, dar bir alan içerisinde sağlıklı yüzey modelinin oluşturulmasını başka bir deyişle yerel jeoit modelini doğru olarak temsil edecek uygun dayanak noktalarının bulunmasını güçleştirmektedir. Bu tür şeritvari mühendislik projelerinde ortometrik yükseklikler, geçki boyunca polinom yüzeyi yerine ardışık dayanak noktalarından EKK yöntemine göre kollokasyon (EKKK) yüzey eğrisi yaklaşımı ile hesaplanabilir.

Bu araştırmada, şeritvari projelerde elipsoidal yüksekliklerin ortometrik yüksekliklere dönüşümünde uygulanan polinom yüzeyi yaklaşımında karşılaşılan problemlere çözüm getirilmesi amaçlanmaktadır. Bunun için Konya-Polatlı (Ankara) Hızlı Tren Projesine ait veriler yukarıda söz edilen durumun ortaya konulması amacıyla kullanılmış ve EKKK yöntemine göre eğri yaklaşımının bir çözüm olarak değerlendirilip değerlendirilemeyeceği sayısal uygulamalar ile irdelenmeye çalışılmıştır.

## 2. EN UYGUN ENTERPOLASYON POLİNOMUNUN BELİRLENMESİ

Yerel GPS/Nivelman jeoit modelinin oluşturulmasında, ilgili çalışma bölgesinde yeterli sayı ve dağılımda Helmert ortometrik ( $H$ ) ve GRS80 elipsoidine göre elipsoidal yüksekliği ( $h$ ) bilinen dayanak noktalarından yararlanılır. Doğruluk seviyesi yüksek (birkaç cm) böylesi noktalara dayanılarak, analitik bir enterpolasyon polinomu ile yerel jeoit modeli oluşturulabilir. Dayanak noktalarının dağılımı ve alanın büyüklüğü göz önüne alınarak fonksiyonun enterpolasyon polinomu,

$$N(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \quad (\text{Eğri}) \quad (1)$$

$$N(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + \dots \quad (\text{Yüzey}) \quad (2)$$

eşitlikleriyle gösterilebilir. Jeoit modelini oluşturmak için  $n$  adet dayanak noktasında jeoit yüksekliği;

$$N = h - H \quad (3)$$

eşitliği ile hesaplanır. (1) eşitliğine göre bilinmeyenlerin bir fonksiyonu olarak ölçüler,

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^k \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^k \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^k \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \underline{l} = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ \dots \\ N_n \end{pmatrix} \quad (4)$$

biçiminde düzenlenir. Dayanak noktalarının sayısı bilinmeyen parametre ( $a_j$ ) sayısına eşit olduğu durumlarda  $\underline{A}$  katsayılar matrisi kare matris çıkar ve problemin tek anlamlı bir çözümü vardır. Ölçü sayısının, bilinmeyen sayısını aştığı durumlarda ise kararsız çözüm ortaya çıkar ve tek anlamlı çözüm EKK yöntemi ile

$$\underline{x} = (\underline{A}^T \underline{A})^{-1} (\underline{A}^T \underline{l}) \quad (5)$$

elde edilebilir. Aranan  $a_i$  katsayılarının belirlenmesiyle eğri denklemi oluşturulmuş olur. Yukarıdaki çözümde ölçülerin başka bir deyişle GPS/Nivelman verilerinin ağırlıklarının eşit olduğu varsayılmaktadır. Buna göre, dengeleme sonucunda ölçülere gelecek düzeltmeler ve birim ağırlıklı ölçünün standart sapması;

$$\underline{v} = \underline{Ax} - \underline{l}$$

$$m_0 = \sqrt{\frac{\underline{v}^T \underline{v}}{n - u}} \quad (6)$$

eşitlikleri yardımıyla hesaplanır. Eğri modelinin oluşturulmasından sonra güzergah içerisinde jeoit yüksekliği bilinmeyen  $p$  sayıda nokta için kestirim işlemi uygulanabilir. Bunun için öncelikle kestirim yapılacak noktaların katsayılar matrisi,

$$\underline{A}_p = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^k \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_p & x_p^2 & \dots & x_p^k \end{pmatrix} \quad (7)$$

oluşturulursa kestirim sonuçları,

$$\underline{l}_p = \underline{A}_p \underline{x} \quad (8)$$

matris çarpımı ile elde edilir. (4) - (8) eşitlikleriyle eğri polinomu için verilen EKK çözümü, (2) yüzey polinom eşitliğine dayalı olarak yeniden kolayca düzenlenebilir.

## 2.1 Polinomun Derecesinin Belirlenmesi

Yerel jeoit belirleme uygulamalarında, çalışma bölgesine hangi dereceden bir yüzey veya eğri polinomu ile yaklaşılabacağı ilk bakışta kestirilemez. Polinomun derecesi için üst sınır, ölçü sayısı ve buna karşın bilinmeyen sayısı ile belirlense de uygun polinom derecesi genellikle deneysel yollarla aranır. Birinci dereceden başlayarak dengeleme sonuçlarının sonsal istatistiksel büyüklükleri (model ve bilinmeyen parametrelerin hata değerleri) bu analiz için uygundur. Teorik olarak polinomun derecesi arttıkça model ile verilerin birbirine daha fazla yaklaşması başka bir deyişle modele ilişkin sonsal varyans değerinin küçülmesi beklenir (Üstün, 2001). Ancak kondüsyon bozukluklarına bağlı olarak kestirilen parametrelerdeki duyarlık kayıpları model derecesi arttıkça model hatasının da büyümesine neden olabilmektedir. Bu nedenle model hatasının büyümeye başladığı polinom derecesinin bir eksiği uygun polinom derecesi olarak görülebilir. Bu durumlar göz önüne alınarak yüksek dereceli polinom seçimi sonucu oluşabilecek duyarlık kayıplarına karşı doğru seçim yapmaya özen gösterilmelidir.

Bilindiği üzere en küçük karelerle dengelemede fonksiyonel modeli oluşturan bilinmeyenlerin en uygun değerleri, normal dağılımda olduğu varsayılan ölçülerin hatalarının karelerinin toplamının minimum olması koşuluna göre belirlenir. Normal dağılımlı olduğu varsayılan ölçülerle kestirilen parametreler test edilmelidir. Uygulanabilir temel istatistiksel testler; model, kestirilen parametreler için anlamlılık ve uyumsuz ölçü testleridir (Yiğit, 2003).

### 2.1.1 Model Testi

$\hat{m}_0^2$ ,  $n$  sayıdaki ölçünün dengelenmesi sonucunda elde edilen birim ağırlıklı ölçünün varyansı (sonsal varyans) olsun. Model testi,  $\hat{m}_0^2$  sonsal varyansının dengeleme öncesinde kestirilen önsel varyans  $m_0^2$  ile karşılaştırılmasına dayanır ve sıfır hipotezi;

$$H_0, \hat{m}_0^2 \geq m_0^2 \text{ yada } \hat{m}_0^2 < m_0^2 \text{ (tek yönlü)} \quad (9)$$

biçiminde öngörülür.  $\chi^2$  dağılımlı;

$$T = \frac{(n - u) \hat{m}_0^2}{m_0^2} \sim \chi^2 \quad (10)$$

test büyüklüğü oluşturulur. Burada  $u$ , bilinmeyen parametre sayısıdır.  $T$  test büyüklüğü ile anlamlılık düzeyi  $\alpha$  ve serbestlik derecesi (fazla ölçü sayısı)  $f = n - u$ 'ya bağlı  $\chi_{f, 1-\alpha}^2$  sınır değeri arasında  $T < \chi_{f, 1-\alpha}^2$  eşitsizliği geçerli ise hipotez kabul edilir ve modelin uygun olduğuna; model hatası olmadığına karar verilir. Aksi durumda öngörülen hipotez reddedilir. Bu, kurulan modelin hatalı olduğu anlamına gelir. Hata, ölçüler ile bilinmeyenler arasındaki ilişkiyi tanımlayan fonksiyonel model veya ölçülerin varyans-kovaryanslarını tanımlayan stokastik model eksikliğinden kaynaklanabilir. Model hataları, parametreler için anlamlılık testi ve uyumsuz ölçü testi yapılarak araştırılır (Yiğit, 2003).

### 2.1.2 Parametreler için Anlamlılık Testi

Kestirilen bir parametre  $\hat{x}_i$  ve standart sapması  $\hat{m}_i$  olsun. Parametrenin beklenen değerinin sıfır kabul edilip edilmeyeceğine karar vermek için,

$$H_0 = E(\hat{x}_i) = 0 \quad (11)$$

sıfır hipotezi oluşturulur. Bu hipotez,

$$H_0 = E(\hat{x}_i) \neq 0 \quad (12)$$

seçenek hipotezi karşısında test edilir.

$\frac{|\hat{x}_i|}{\hat{m}_i}$  test büyüklüğü  $t$  dağılımlıdır. Test büyüklüğü,  $t$  dağılımının serbestlik derecesi ve  $\alpha$  anlamlılık düzeyine bağlı

$t_{f, 1-\alpha/2}$  güven sınır değerinden küçük çıkarsa;

$$\frac{|\hat{x}_i|}{\hat{m}_i} < t_{f, 1-\alpha/2} \quad (13)$$

sıfır hipotezi kabul edilir; ilgili terim polinomdan silinir. Seçenek hipotezinin geçerli olması durumunda ise kestirim değerinin anlamlı olduğu kararına varılır (Üstün, 2001; Yiğit, 2003).

## 3. EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİNE GÖRE KOLLOKASYON

### 3.1 Kollokasyon

Enterpolasyon için kullanılan fonksiyonel model, ölçüleri çoğu kez yeterli incelikte temsil etmez. Böyle durumlarda, basit bir fonksiyonel model ile birlikte ölçülerin bu modelden sapmalarını ifade eden stokastik model (=kollokasyon) öngörülmelidir. En genel anlamıyla kollokasyon, dengeleme sayesinde bilinmeyen parametrelerin ve enterpolasyon problemlerinin bir arada çözüldüğü matematiksel bir modeldir.

Dolaylı ölçüler yönteminin fonksiyonel modeli,

$$\underline{l} + \underline{v} = \underline{Ax} \quad (14)$$

eşitlikleriyle bu modele stokastik bir büyüklük, sinyalin eklenmesi ile,

$$\underline{l} + \underline{v} = \underline{Ax} + \underline{s} \quad (15)$$

biçiminde genişletilebilir. Bu eşitliğe basit kollokasyonun fonksiyonel modeli denir. Burada;

$\underline{l}$ :	ölçü vektörünü
$\underline{v}$ :	ölçülere ilişkin rasgele dağılımlı korelasyonsuz hatalar vektörünü,
$n=-v$ :	rasgele dağılımlı korelasyonsuz ölçü hatalarını (noise),
$\underline{s}$ :	rasgele dağılımlı korelasyonlu hatalar vektörünü (sinyal),
$\underline{Ax}$ :	trend, deterministik bölümü temsil etmektedir.

Kollokasyon problemi;

- Bir dengeleme sonucu bir ölçüye ilişkin düzeltmeyi sinyal ve gürültü olmak üzere iki bileşene ( $v = s + n$ ) ayırarak, ölçülerden sadece korelasyonsuz hataları ( $n=noise$ ) süzmek
- Fonksiyonel modeldeki bilinmeyen parametreleri ( $a_0, a_1, a_2, \dots$ ) belirlemek
- Ölçü yapılmamış (kestirim yapılacak) noktalardaki enterpolasyon işlemini gerçekleştirmek
- Ölçülerin ve aranan büyüklüklerin ortalama hatalarını hesaplamak

şeklinde özetlenebilir (Demirel, 1977).

### 3.2 En Küçük Kareler Yöntemine Göre Enterpolasyon ve Kollokasyon

En Küçük Kareler (EKK) yöntemine göre kollokasyon uygulamalarında tüm işlemler,

1. Trendin belirlenmesi
2. Deneysel kovaryansların hesaplanması
3. Kestirim yapılacak noktaların sinyallerinin kestirilmesi

olmak üzere üç aşamalı gerçekleştirilir.

#### 3.2.1 Trendin Belirlenmesi

En Küçük Kareler yöntemine göre kollokasyon işlemine başlamadan önce, ölçüleri modelleyen bir analitik fonksiyon belirlenerek ölçüler bu model üzerinden incelenir. Bir ön dengeleme ile ölçülerden deterministik kısmın çıkartılmasıyla



Ön dengeleme ile ölçülerden deterministik kısmın çıkarılmasıyla kalan stokastik büyüklük ( $z$ ), gürültü ( $n$ ) ve sinyalden ( $s$ ) oluşmaktadır. Amaç bu stokastik büyüklüklerden sinyallerin ayrıştırılmasıdır. Bunun için deneysel kovaryanslar yardımıyla oluşturulan kovaryans fonksiyonu ile sinyaller arasındaki korelasyonu gösteren kovaryans matrisleri hesaplanır. Ölçü (dayanak) noktalarındaki sinyallere ( $s$ ) iç sinyaller, kestirim noktasındaki ( $s_p$ ) dış sinyaller denir. Sinyal ölçü hatası gibi raslantısal hata niteliğindedir ve ortalama değeri (ümit değeri) sifıra eşittir.

$\underline{s}$  ve  $\underline{s}_p$  lerin hesabı için sinyallere ilişkin korelasyonlar ya da ağırlık katsayıları verilmiş olmalıdır.  $l_i$  ölçüsünün ortalama hatası  $\mu_i$  ise, uygun olarak seçilecek  $\mu_s^2$  sabitesiyle ve seçilen kovaryans fonksiyonu ile ölçü noktalarının kendi aralarındaki, ölçü noktaları ile kestirilecek noktalar arasındaki ve kestirilecek noktaların kendi aralarındaki korelasyon matrisleri hesaplanır. Kestirilecek nokta sayısı  $m$ , ölçü sayısı  $n$  ise, iç ve dış sinyallerin öz kovaryans matrisleri;

$$\underline{C}_{ss} = \begin{bmatrix} C_s(0) & C_{s_1s_2} & \dots & C_{s_1s_n} \\ C_{s_2s_1} & C_s(0) & \dots & C_{s_2s_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{s_ns_1} & C_{s_ns_1} & \dots & C_s(0) \end{bmatrix}, \underline{C}_{s_p s_p} = \begin{bmatrix} C_s(0) & C_{s_1s_2} & \dots & C_{s_1s_m} \\ C_{s_2s_1} & C_s(0) & \dots & C_{s_2s_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{s_ms_1} & C_{s_ms_1} & \dots & C_s(0) \end{bmatrix} \quad (21)$$

iç ve dış sinyaller arasındaki çapraz kovaryans matrisi ise;

$$\underline{C}_{s_p s} = \begin{bmatrix} C_s(0) & C_{s_1s_2} & \dots & C_{s_1s_n} \\ C_{s_2s_1} & C_s(0) & \dots & C_{s_2s_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{s_ms_1} & C_{s_ms_1} & \dots & C_s(0) \end{bmatrix} \quad (22)$$

dir. Eşit doğrulukta ve ortalama hataları  $\mu$  olan ölçülerin kovaryans matrisi,

$$\underline{C}_{ll} = \mu_n^2 \underline{E} \quad (\underline{E}: \text{Birim matris}) \quad (23)$$

köşegen matristir. Kovaryans matrisleri  $\mu_s^2$  değerine bölüldüğünde;

$$\underline{Q}_{ss} = \underline{C}_{ss} / \mu_s^2, \quad \underline{Q}_{s_p s_p} = \underline{C}_{s_p s_p} / \mu_s^2, \quad \underline{Q}_{s_p s} = \underline{C}_{s_p s} / \mu_s^2, \quad \underline{Q}_{ll} = \underline{C}_{ll} / \mu_s^2 \quad (24)$$

ters ağırlık katsayıları matrisleri elde edilir. Ölçüler ve sinyallerin kovaryans matrisleri arasında korelasyon bulunmadığından hata yayılma kuralı ile,

$$\underline{Q} = \underline{Q}_{ss} + \underline{Q}_{ll} \quad (25)$$

elde edilir. EKK yöntemine göre dengelemeye geçildiğinde bilinmeyenler;

$$\underline{x} = (\underline{A}^T \underline{Q}^{-1} \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{Q}^{-1} \underline{l} \quad (26)$$

bulunur ve sinyaller;

$$\underline{k} = \underline{Q}^{-1} (\underline{l} - \underline{A}\underline{x}) \quad (27)$$

$$\underline{n} = \underline{Q}_{ll} \underline{k} \quad (28)$$

$$\underline{s} = \underline{Q}_{ss} \underline{k} \quad (29)$$

eşitliklerinden  $s_i$  ve  $n_i$  elde edilmiş olur. Kestirim yapılacak noktaların sinyal değerleri;

$$\underline{s}_p = \underline{Q}_{s_p s} \underline{k} \quad (30)$$

eşitliğiyle, kestirim yapılacak noktaların aranan değerleri ise;

$$\underline{l}_p = \underline{A}_p \underline{x} + \underline{s}_p \quad (31)$$

ile elde edilir. Birim ağırlıklı ölçünün ortalama hatası ise

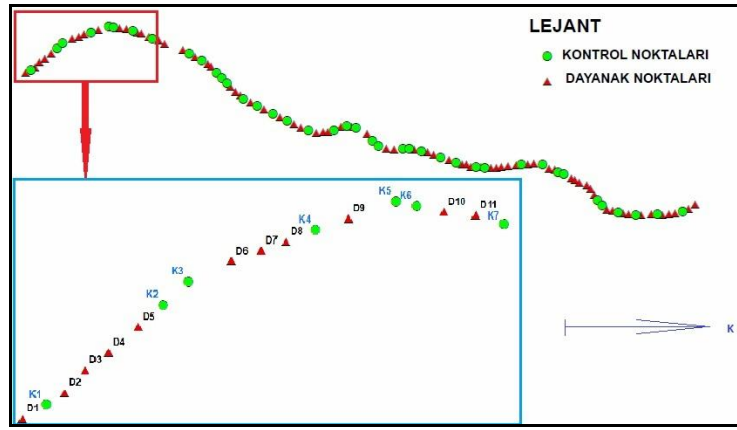
$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{\underline{l}_p^T \underline{k}}{n-u}} \quad (32)$$

bağıntısı ile hesaplanır (Wolf, 1977; Öztürk ve Şerbetçi, 1992).

## 4. UYGULAMA

### 4.1 Uygulama Alanı

Uygulama alanı, Konya-Polatlı (Ankara) Hızlı Tren Projesidir. Proje uzunluğu yaklaşık 210 km dir. Proje alanındaki noktaların 70'i dayanak 40'i ise kontrol noktası olarak seçilmiştir (Şekil 2).



Şekil 2: Uygulama alanı

## 4.2 Hesaplamalar

### 4.2.1 Yüzey ve Eğri Polinomları Yaklaşımı ile Jeoit Modelinin Oluşturulması

Uygulama alanı için seçilen 70 adet dayanak noktasına ait koordinatlar ve jeoit yükseklikleri kullanılarak farklı derecelerden polinom yüzeyi geçirilmiş ve her modele ait standart sapmalar ( $m_0$ ) hesaplanmıştır. Bu aşamada sonuçların anlamlılığı model ve parametre testleri ile sınanmıştır. Oluşturulan her yüzey modeli için 40 kontrol noktasının jeoit yükseklikleri hesaplanmış ve gerçek değerler ile karşılaştırılmıştır (Tablo 1). Yüzey polinomu bu uygulama alanında sadece 1. ve 2. deceden geçirilebilmiş daha üst dereceli çözümler için bilinmeyen parametrelerin anlamsız sonuçlar verdiği görülmüştür. Dayanak noktalarının güzergah üzerinde bulunması yani nokta dağılımının düzensiz oluşu yüzey yaklaşımını olumsuz etkilemiştir. Gerek model istatistikleri gerekse kontrol noktalarında hesaplanan ve bilinen jeoit yükseklikleri arasındaki karşılaştırmalardan yükseklik hatalarının oldukça büyük değerler verdiği anlaşılmaktadır (Ceylan vd., 2010).

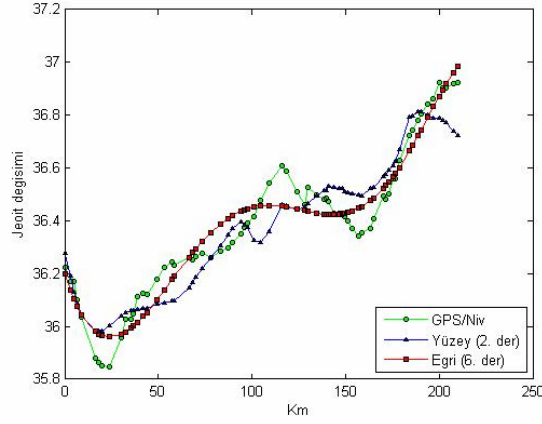
Tablo 1: Polinom yüzeyi modeline göre model istatistikleri ve kontrol noktaları için karşılaştırma istatistikleri

Polinom derecesi	Model istatistikleri			Jeoit yükseklik farkları			
	min (cm)	max (cm)	$m_0$ (cm)	min (cm)	max (cm)	ort. (cm)	rms (cm)
1	-21.90	19.25	$\pm 10.60$	-20.94	20.01	-0.22	$\pm 9.68$
2	-20.15	15.65	$\pm 9.89$	-18.54	18.81	-0.87	$\pm 10.03$

Uygulama alanı için geçki boyunca seçilen 70 adet dayanak noktasına ait kilometreler apsis, jeoit yükseklikleri ordinat değerleri olarak alınmak suretiyle polinom eğrisi geçirilmiştir. Yüzey modeline göre bilinmeyen parametre sayısının az olması sayesinde model 6. dereceye kadar yükseltilebilmiştir. Daha üst dereceli yaklaşımlarda parametrelerin anlamlılıkları azalmaktadır. Model hataları polinomun derecesi arttıkça beklendiği gibi giderek küçülmüştür. 40 noktada yapılan karşılaştırmalar eğri yaklaşımı ile elde edilen ortalama hata büyüklüğünün (rms) yaklaşık  $\pm 7$ cm civarında çıkmasını sağlamıştır. Eğri yaklaşımına ilişkin model istatistikleri ve jeoit yüksekliği karşılaştırma sonuçları Tablo 2’de verilmiştir. Dayanak noktalarında yüzey ve eğri polinomlarının gerçek jeoit kesitine göre uyumu Şekil 3’de gösterilmektedir (Ceylan vd., 2010).

Tablo 2: Polinom eğrisi modeline göre model istatistikleri ve kontrol noktaları için karşılaştırma istatistikleri

Polinom derecesi	Model istatistikleri			Jeoit yükseklik farkları			
	min (cm)	max (cm)	$m_0$ (cm)	min (cm)	max (cm)	ort. (cm)	rms (cm)
1	-25.91	22.79	$\pm 12.09$	-23.45	25.12	-0.18	$\pm 11.59$
2	-22.65	23.22	$\pm 11.81$	-23.64	24.51	-0.75	$\pm 12.04$
3	-27.40	23.83	$\pm 11.42$	-24.47	25.79	-0.51	$\pm 11.78$
4	-14.35	18.40	$\pm 7.96$	-14.71	15.99	-0.17	$\pm 7.73$
5	-16.40	11.57	$\pm 7.08$	-16.29	13.90	-0.05	$\pm 7.26$
6	-15.18	11.49	$\pm 7.04$	-14.97	12.84	0.11	$\pm 7.20$



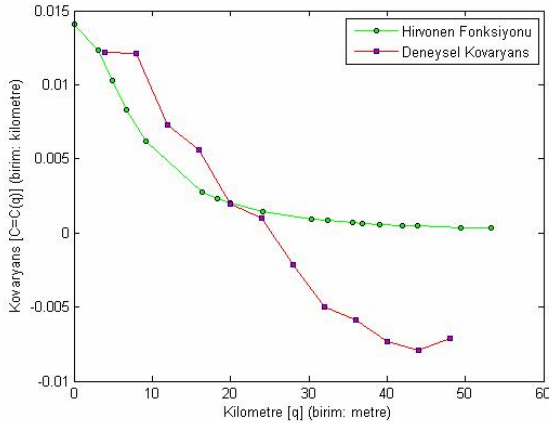
Şekil 3: Jeoit yüksekliklerinin değişimi

#### 4.2.2 EKKK ile Jeoit Modelinin Oluşturulması

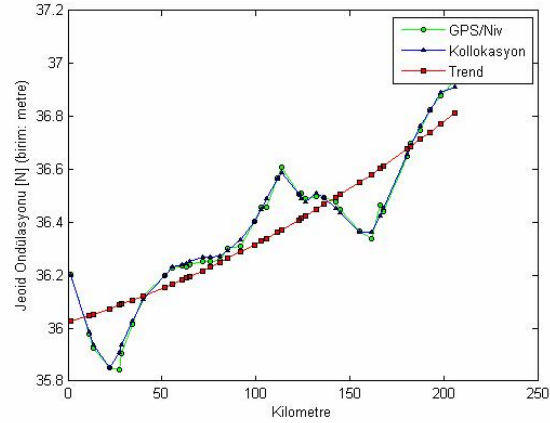
Ölçü noktalarındaki ( $s$ ) ve kestirim yapılacak noktadaki ( $s_p$ ) sinyallerini hesaplamak için bunlar arasındaki korelasyonu tanımlayan bir kovaryans fonksiyonu belirlenmiştir. Kovaryans fonksiyonunun belirlenmesinde deneysel yöntemlerle elde edilmiş varyans ve kovaryans değerleri kullanılmıştır. Bunun için, GPS ve nivelman ölçülerinin önceki doğruluk ölçütlerinden gürültü bileşenine ilişkin varyans değeri  $\mu_n^2 = C_n(0) = 3.6^2 \text{ cm}^2$ , sinyal ve gürültü bileşenlerini içeren stokastik büyüklüklerin varyansı  $\mu_z^2 = C_z(0) = 11.8^2 \text{ cm}^2$  alınmıştır. İkinci büyüklük 2.dereceden bir polinom eğrisi ile gerçekleştirilen ön dengeleme işleminin sonsal varyans değerine karşılık gelmektedir (Tablo 2). Bu iki büyüklük arasında korelasyon olmadığından ölçü noktalarında sinyallerin varyans değeri kovaryansların yayılımı kuralı gereğince,

$$C_s^{(0)} = \mu_s^2 = \mu_z^2 - \mu_n^2 \quad (33)$$

eşitliğinden hesaplanabilir. Buna göre sinyallerin varyansı  $C_s(0) = 11.2^2 \text{ cm}^2$  dir. Dayanak noktalarında sinyaller arası kovaryans değerleri 2, 4, 8, 10, 20 ve 30 km aralıklarında hesaplanmıştır. Noktalar arası uzaklığın fonksiyonu olarak kovaryans değerleri ve bu değerlere uygun Hirvonen fonksiyonu Şekil 4'de görülmektedir. Deneysel kovaryanslar yardımıyla Hirvonen fonksiyonu için elde edilen kritik uzaklık değeri  $q_0 = 8.1 \text{ km}$  dir.



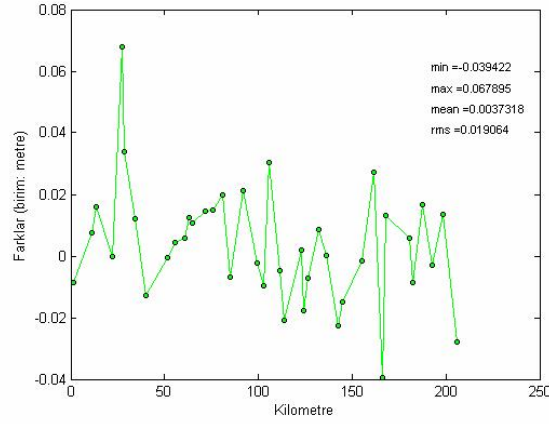
Şekil 4: Kovaryans fonksiyonu



Şekil 5: Jeoit yüksekliklerinin değişimi, trend ve kollokasyon modeli

Seçilen kovaryans fonksiyonuna göre ölçü noktaları ile kestirilecek noktalar arasındaki öz ve çapraz kovaryans matrisleri (21) - (23) eşitlikleri ile hesaplanmıştır. Kovaryans matrisleri (24) gereğince, (33)'den hesaplanmış  $\mu_s^2$  değerine bölünerek korelasyon matrisleri hesaplanmıştır. EKK yöntemine göre dengeleme yapılarak bilinmeyenler, sinyaller, gürültüler, kestirim yapılacak noktalara ilişkin sinyaller ve enterpolasyon değerleri (26) - (31) eşitlikleri ile bulunmuş, dengeleme işleminin birim ağırlıklı ölçünün ortalama hatası  $\pm 7.19 \text{ cm}$  olarak belirlenmiştir. Dayanak noktalarında kollokasyon ile elde edilen değerlerin gerçek jeoit kesitine göre uyumu Şekil 5'de gösterilmektedir. Jeoit kesitinin yön değiştirdiği yerler dışında, kollokasyon modeli gerçek jeoit değerleriyle oldukça iyi uyum sağlamıştır. Enterpolasyon noktalarına ait gerçek değerler ile EKKK ile elde edilen değerler karşılaştırıldığında, minimum fark -3.9 cm, maximum fark 6.7 cm, farkların ortalaması 0.4 cm ve farklara ait standart sapma  $\pm 1.9 \text{ cm}$  olarak elde edilmiştir. Farkların değişimi Şekil 6'da gösterilmiştir. Farkların büyük oranda -2 cm ve +2 cm aralığında toplandıkları şekilden anlaşılmaktadır.





Şekil 6: Gerçek değer ile EKKK arasındaki farklar

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Karayolu, demiryolu vb. şeritvari projelerde harita çalışmalarını yürütmek için seçilen dayanak noktaları genellikle proje güzergahı boyunca ilerleyen bir dağılım sergiler. Böylesi bir nokta dağılımı GPS/Nivelman yöntemine dayalı yükseklik belirlemeleri için yüzey modeli oluşturulmasını zora sokmaktadır. B.Ö.H.H.B.Ü.Y.'de yerel jeoit modelinin belirlenmesine ilişkin esaslar daha çok belirli bir bölgeye düzgün dağılmış noktalar içindir. Şeritvari projelerde olduğu gibi bir geçki boyunca dağılmış noktalar için yüzey modeli yerine EKKK yöntemine göre yüzey eğrisi yaklaşımı izlenebilir. Bu çalışmada gerçek proje verilerine dayalı olarak jeoit modeline polinom eğrisi ile yaklaşılması amaçlanmıştır.

Söz konusu yaklaşım, 210 km uzunluğunda bir geçki olup 70 dayanak, 40 kontrol noktasından oluşmaktadır. Uygulama alanının topografik durumu az engebeli niteliktedir. Uygulama alanında dayanak noktalarının yüzeye düzgün dağılmak yerine bir geçki boyunca seçilmiş olması nedeniyle yüzey modelinde üst derecelere çıkılamamıştır. 1. ve 2. derece modellerden elde edilen değerler ile gerçek değerler arasındaki farklara ait standart sapma  $\pm 10$  cm, eğri yaklaşımında ise daha üst dereceden (6. dereceye kadar) polinom eğrisi geçirilebilmesine rağmen farklara ait standart sapma  $\pm 7.2$  cm olduğu gözlenmiştir. Diğer yandan, 2. dereceden eğri polinomu ile EKKK yöntemine göre yüzey eğrisi yaklaşımında ise farklara ait standart sapma  $\pm 1.9$  cm olarak elde edilmiştir.

Sonuçlar göstermektedir ki; karayolu, demiryolu vb. geçki boyunca gerçekleştirilecek projelerde GPS/Nivelman tekniğine dayalı ortometrik yükseklikler, polinom yüzeyi yerine EKKK yöntemine göre yüzey eğrisi yaklaşımından daha yüksek doğrulukta elde edilebilmektedir. Burada, EKKK yöntemine göre yüzey eğrisi yaklaşımında modelden arta kalan düzeltmeler sinyallerinin kestirilmesinde önemli bir avantaj sağlamaktadır. Bu sayede ortometrik yükseklikler, modelden elde edilen değer ve kestirilen sinyalin toplamı biçiminde ifade edilmektedir. Hirvonen fonksiyonunda geçen kritik uzaklık değeri deneysel yolla saptanmış ve en iyi sonuçlara 8.1 km'lik kritik uzaklık değeri ile ulaşıldığı görülmüştür. Kollokasyon yönteminin bir diğer avantajı da polinom derecesinin çok yüksek seçilmesi zorunluluğunu ortadan kaldırmasıdır. Bu iş için 2. dereceden bir polinoma dayalı EKK ile kollokasyon uygulaması yeterli doğruluğu sağlamıştır.

## KAYNAKLAR

Ceylan A., Gürses H.B., Üstün A., Doğanalp S., 2010. *Şeritvari Projelerde Ortometrik Yükseklik Hesabı için Polinom Eğrisi Yaklaşımı*, Harita ve Kadastro Mühendisleri Odası, Mühendislik Ölçmeleri STB Komisyonu, 5. Ulusal Mühendislik Ölçmeleri Sempozyumu, 20-22 Ekim 2010, Zonguldak.

Ceylan S., 2007. *Büyük Ölçekli Harita Üretim Çalışmalarında Güncellenmiş Türkiye Jeoidi (TG99A) ve Yeni Türkiye Jeoidi (TG-03)'ün Doğrudan Kullanılabilirliğinin Araştırılması*, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Konya.

Demirel H., 1983. *Kollokasyon*, Harita Kadastro Mühendisler Odası Dergisi, (45-47):75-98, Ankara.

Demirel H., 1977. *En Küçük Kareler Yöntemine Göre Prediksyon ve Kollokasyon*, İ.D.M.M.A., İstanbul (Yayınlanmamış).

Kartal A., 2001. *GPS İle Yükseklik Belirlemede İnterpolasyon Yöntemlerine Ait Bir Uygulama*, YTÜ Dergisi, (1): 27-41, İstanbul.

*Karayolu ve Demiryolu Projelerinde Ortometrik Yükseklik Hesabı: En Küçük Kareler İle Kollokasyon*

Kılıçoğlu A., Fırat O., 2003. *Büyük Ölçekli Harita Üretiminde GPS İle Ortometrik Yükseklik Belirlemeye Yönelik Jeoid Modelleme ve Uygulamalar*, TUJK 2003 Yılı Bilimsel Toplantısı, Coğrafi Bilgi Sistemleri ve Jeodezik Ağlar Çalıştayı, 24-26 Eylül 2003, Konya.

Öztürk E., Şerbetçi M., 1992. *Dengeleme Hesabı Cilt III*, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, yayın no:40, 524-533, Trabzon.

Şanlıoğlu İ., Ceylan A., İnal C., Çorumluoğlu Ö., 2002. *Konya Bölgesi İçin GPS İle Elde Edilen Elipsoidal Yüksekliklerden Ortometrik Yüksekliklerin Hesaplanması*, Selçuk Üniversitesi Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliği Öğretiminde 30. Yıl Sempozyumu, 16-18 Ekim 2002, Konya.

Üstün A., 2001. *GPS Nivelmanı Yardımıyla Ortometrik Yüksekliklerin Elde Edilmesine Yönelik Jeoit Belirleme Yöntemleri*. *YTÜ Dergisi*, (1): 62-82, İstanbul.

Üstün A., 2002. *Bölgesel ve Global Yükseklik Sistemlerinin Oluşturulmasında GPS'nin Katkısı Üzerine Bir İnceleme: Antalya-Samsun Mareograf İstasyonları Arasında GPS Nivelmanı Örneği*, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, İstanbul.

Üstün A., 2007. *Jeodezide Yaklaşım Yöntemleri: Enterpolasyon ve Kollokasyon*, Yüksek Lisans Ders notları, Konya, (Yayınlanmamış).

Wolf H., 1977. *Kollokasyon und Ausgleichsrechnung*, Yıldız Üniversitesi Dergisi, İstanbul.

Yiğit C.Ö., 2003. *Elipsoidal Yüksekliklerin Ortometrik Yüksekliğe Dönüşümünde Kullanılan Enterpolasyon Yöntemlerinin Karşılaştırılması*, S.Ü. Fen Bil. Enstitüsü, Y.L. Tezi, Konya.

B.Ö.H.H.B.Ü.Y., 2005. *Büyük Ölçekli Harita ve Harita Bilgileri Üretim Yönetmeliği*, Harita ve Kadastro Müh. Odası, Ankara.