TMMOB Harita ve Kadastro Mühendisleri Odası
12. Türkiye Harita Bilimsel ve Teknik Kurultayı
11-15 Mayıs 2009, Ankara

DENGELEME PROBLEMİNE HEDEF PROGRAMLAMA YAKLAŞIMI

Mustafa ŞİMŞEK

Harita Genel Komutanlığı, Ankara, mustafa.simsek@hgk.mil.tr

ÖZET

Bu çalışmada; en küçük karelerle dengeleme probleminin normal denklemlerinin, hedef programlama problemi biçiminde modellenerek dengeleme bilinmeyenlerin hesaplanması amaçlanmıştır. Bu nedenle, 2 nci Bölümde kısa bir şekilde dolaylı ölçülerin en küçük kareler yöntemine göre dengeleme eşitlikleri verildikten sonra 3 üncü Bölümde kısaca hedef programlama tanıtılmıştır. 4 üncü Bölümde ortalama mutlak sapmaların minimizasyonu (MINMAD regresyon) ve MINMAD regresyona doğrusal programlama yaklaşımı incelenerek en küçük karelerle dengelemenin normal denklemleri hedef programlama problemi olarak modellenmiştir. 5 inci Bölümde, geliştirilen yöntemin uygulanabilirliğini göstermek amacıyla küçük bir nivelman ağında uygulama yapılmıştır. Sonuç olarak, dengeleme probleminin normal denklemleri, hedef programlama yaklaşımıyla da çözülmüş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Anahtar Sözcükler: En küçük kareler, dengeleme, hedef programlama, regresyon, MINMAD regresyon

ABSTRACT

GOAL PROGRAMMING APPROACH TO THE ADJUSTMENT PROBLEM

In this study, it was aimed to compute the variables of the adjustment by modeling the normal equations of the least squares adjustment problem as goal programming problem. After the equations for adjustment of the indirect observations through least squares method were therefore given briefly in Section 2, goal programming was presented shortly in Section 3. In Section 4, minimizing mean absolute deviations (MINMAD regression) and linear programming approach for MINMAD regression were discussed and the normal equations of the least squares adjustment was modeled as goal programming problem. In order to show applicability of the derived method, an application was made on a small leveling network in Section 5. As a result, the normal equations of the least squares adjustment problem was solved also through goal programming approach and the results were compared.

Key Words: Least squares, adjustment, goal programming, regression, MINMAD regression

1. GİRİŞ

Hedef programlama probleminde, birçok hedef birlikte göz önüne alınarak bunların aynı anda gerçekleştirilmesine çalışılır. Bazen birbirleriyle çelişebilen hedeflere öncelikler ve ağırlıklar verilerek sırayla gerçekleşmeleri sağlanır. Jeodezik ağların dengelenmesinde normal denklemlerin her biri, gerçekleşmesi istenen birer hedef olarak düşünülebilir ve normal denklemlerin tamamı bir hedef programlama problemi yapısına dönüştürülebilir.

Bu çalışmada, dengeleme problemine hedef programlama yaklaşımı ele alınmıştır. Bu amaçla, en küçük karelerle dengeleme bağıntıları verildikten sonra kısaca hedef programlama tanıtılmıştır. Daha sonra MINMAD regresyon ele alınmış ve MINMAD regresyonun hedef programlama ile çözüm yolu gösterildikten sonra en küçük karelerle dengeleme probleminin normal denklemleri hedef programlama problemi olarak modellenmiştir. Nihayet bir uygulama ile konu incelenerek elde edilen sonuçlar verilmiştir.

2. DOLAYLI ÖLÇÜLERİN EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİNE GÖRE DENGELENMESİ

Duyarlıkları farklı, bağımsız ve dolaylı ölçüler L_i, bunların ağırlıkları P_i, dengeleme sonucunda hesaplanacak düzeltmeleri V_i ve bilinmeyenlerin kesin değerleri Z_i ile gösterilsin. Bu durumda,

$$L_i + V_i = F_i(Z_1, Z_2, Z_3, \ldots) \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n \; ; \qquad n: \text{ölçü sayısı} \tag{1}$$

biçiminde doğrusal olmayan “İlk Düzeltme Denklemleri” kurulur (Aksoy, 1981; Öztürk ve Şerbetçi, 1989). Bu denklemler doğrusallaştırılır ve ağırlıklarıyla birlikte ifade edilerek

Düzeltme Denklemi	Ağırlık	
$V_i = a_i dz_1 + b_i dz_2 + c_i dz_3 + \ldots - l_i$	P_i	(2)

biçiminde dengelemenin matematik modeli oluşturulur (Wolf, 1975;1979). Burada, bilinmeyenlerin yaklaşık değerleri Z_i^0 ve küçültülmüş bilinmeyenler dz_i olmak üzere

$$Z_i = Z_i^0 + dz_i \qquad i = 1,2,\ldots,m \tag{3}$$

ile kesin değerler (Ulsoy, 1974) ve

$$-l_i = F_i(Z_1^0, Z_2^0, Z_3^0, \ldots) - L_i \tag{4}$$

ile küçültülmüş ölçüler ifade edilmekte olup $a_i, b_i, c_i \ldots$ katsayılardır. Dengeleme probleminde,

l	$(n*1)$	küçültülmüş ölçüler vektörü,
A	$(n*u)$	düzeltme denklemleri katsayılar matrisi,
V	$(n*1)$	düzeltmeler vektörü
Z	$(u*1)$	küçültülmüş bilinmeyenler vektörü,
C	$(n*n)$	ölçülerin varyans-kovaryans matrisi,
P	$(n*n)$	ölçülerin ağırlık matrisi,
Q	$(n*n)$	ölçülerin ağırlık katsayıları (kofaktörler) matrisi,
σ_0^2		önsel varyans,

olmak üzere, (2) bağıntısı ile verilen dengelemenin matematik modeli matrislerle

$$V = AZ - l, \qquad C = \sigma_0^2 P^{-1} \tag{5}$$

biçiminde tanımlanabilir (Demirel, 1987; Şimşek, 1997a). $V^T PV = minimum$ koşulunu öngören en küçük kareler yöntemine göre ve N, normal denklemler matrisini; n, yalın terimler vektörünü göstermek üzere

$$N = A^T PA \qquad \text{ve} \qquad n = A^T Pl \tag{6}$$

ile

$$NZ - n = 0 \tag{7}$$

biçiminde normal denklemler elde edilir (Ulsoy, 1980). N matrisinin regüler olduğu kabul edilerek bilinmeyenler

$$Z = N^{-1} n \tag{8}$$

ile çözülür (Şimşek, 1988;1995).

Z vektörü hesaplandıktan sonra (5) bağıntısı ile düzeltmeler vektörü V, sonra dengelenmemiş ölçüler (L) ve V yardımıyla dengelenmiş ölçüler vektörü $\hat{L}$

$$\hat{L} = L + V \tag{9}$$

biçiminde hesaplanır (Şimşek, 1992). Düzeltmelerin hesabından sonra birim ağırlıklı ölçüye ilişkin sonsal standart sapma (n: ölçü ve u: bilinmeyen sayısı olmak üzere),

$$\hat{\sigma} = [(V^T PV)/(n-u)]^{1/2} \tag{10}$$

biçiminde elde edilir (Şimşek, 1997b).

3. HEDEF PROGRAMLAMA

Birçok iş, işlem ve beklenti gibi birden fazla hedefin birlikte gerçekleştirilmesi istenen problemlerin çözümü hedef programlama ile elde edilebilir. Hedef programlamanın temel düşüncesi, orijinali çok amaçlı olan problemi tek amaçlı probleme dönüştürmektir (Öztürk, 2004). Hedef programlamada, öncelikle ilgili hedefler ve bu hedefler için kabul edilen öncelikler belirlenir. Genel olarak hedefler sıralanır ve her öncelik seviyesindeki hedeflere ağırlıklar verilir (Turanlı ve Köse, 2005). Hedef programlamada, tüm hedeflere ilişkin sapma değişkenlerinin minimum yapılması hedeflenir.

3.1 Hedef Programlamanın Matematiksel Modeli

Genel bir hedef programlama modeli,

$$\begin{aligned} &MinZ = W_1P_1(d_1^-,\ d_1^+) + W_2P_2(d_2^-,\ d_2^+) + \Lambda + W_mP_m(d_m^-,\ d_m^+) \\ &g_j(x) + d_j^- - d_j^+ = b_j, \qquad j = 1,2,\Lambda\ ,n \\ &f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = b_i, \qquad i = 1,2,\Lambda\ ,m \end{aligned} \tag{11}$$

biçiminde, n tane kısıt ve m tane amaç fonksiyonu ile ifade edilebilir (Gülenç ve Karabulut, 2005; Turanlı ve Köse, 2005). Burada;

$P_1, P_2, \Lambda\ P_m$: Ağırlıklar
$g(x)$: Kısıt fonksiyonları
$f(x)$: Amaç fonksiyonları
b: Kısıt/amaç fonksiyonunun hedef değeri (sağ yan değeri)
$d^-,\ d^+$: Kısıt/amaç fonksiyonundan sırayla negatif ve pozitif sapma miktarları
$W_1,\ W_2, \Lambda\ , W_m$: Önceliklerdir (W_1 ilk öncelik ve W_m son önceliktir).

$x = (x_1, x_2, \Lambda\ , x_n)$ karar değişkenlerine ilişkin bir fonksiyon olarak i inci amaç fonksiyonunun matematiksel ifadesi $f_i(x)$ ve hedef değeri b_i olmak üzere

$$f_i(x)\ \{\geq, \leq, =\}\ b_i, \quad (i = 1,2,K\ ,n) \tag{12}$$

biçiminde 3 olası hedef düşünülüp bunlardan herhangi biri, negatif bir sapma $(d_i^- \geq 0)$ ilave edilerek ve pozitif bir sapma $(d_i^+ \geq 0)$ çıkarılarak (13) bağıntıları ile verilen hedef programlama şekline getirilebilir.

Hedef türü	Hedef programlama biçimi	Minimize edilecek sapma değişkeni	
$f_i(x) \leq b_i$	$f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = b_i$	d_i^+	(13a)
$f_i(x) \geq b_i$	$f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = b_i$	d_i^-	(13b)
$f_i(x) = b_i$	$f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = b_i$	$d_i^- + d_i^+$	(13c)

(13a), (13b), (13c) ile gösterilen hedeflerin sağlanması için sırayla, pozitif sapma d_i^+; negatif sapma d_i^-; negatif ve pozitif sapmaların her ikisinin (d_i^-, d_i^+) de minimize edilmesi gerekir (Ignizio, 1982;1989).

(11) bağıntısında $W_1 = W_2 = \Lambda = W_m = 1$ ve $P_1 = P_2 = \Lambda = P_m = 1$ ise bu eşit öncelikli çok hedefli bir modeli tanımlamakta olup erişim fonksiyonunun yapısı

$$MinZ = d_1^- + d_2^+ + d_3^- + \Lambda + d_n^- \tag{14}$$

biçimindedir.

Dengelemenin normal denklemlerinin çözümü eşit önceliğe sahip olup çalışmada normal denklemler hedef programlama problemi olarak ele alınacaktır. Bu nedenle *eşit öncelikli çok hedefli* bir hedef programlama türü kullanılacaktır. Ayrıca normal denklemlerde sağ yan taraf "=" biçimde olduğundan erişim fonksiyonunda tüm sapma değişkenleri yer alacaktır.

4. EN KÜÇÜK KARELERLE DENGELEME PROBLEMİNİN NORMAL DENKLEMLERİNİN HEDEF PROGRAMLAMA PROBLEMİ OLARAK MODELLENMESİ VE DENGELEME BİLİNMEYENLERİNİN TAHMİNİ

4.1 Regresyonda Ortalama Mutlak Sapmaların Minimizasyonu (MINMAD Regresyon)

En küçük kareler kestiricisinin veri kümesindeki uç değerlerden çok etkilenmesi gibi dezavantajlarından dolayı doğrusal regresyonda minimum ortalama mutlak sapma (MINMAD) kestiricileri tercih edilebilmektedir (Eminkahyagil, 1997).

Basit doğrusal regresyon için

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon \tag{15}$$

modelinde X_i, Y_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ ölçü değerleri olmak üzere β_o ve β_1 katsayılarının tahmin edilebilmesi için,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i\right| \tag{16}$$

ifadesinin minimize edilmesi gerekir. Bu bağıntı, bağımlı değişkenin ölçülen ve tahmin edilen değerlerinden ortalama mutlak sapma olarak bilinir. (16) bağıntısının minimizasyonu,

$$\sum_{i=1}^{n}\left|Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i\right| \tag{17}$$

biçiminde ifade edilen mutlak sapmaların toplamının minimizasyonu ile aynıdır (Arthanari and Dodge, 1993). Çok boyutlu doğrusal regresyon ifadesinde ölçü sayısı n ve değişken sayısı p olmak üzere (17) bağıntısı

$$\sum_{i=1}^{n}\left|Y_i - \sum_{j=1}^{p} X_{ij}\beta_j\right| \tag{18}$$

biçiminde tanımlanır. β nın tahmin edilebilmesi için bu ifadenin minimize edilmesi gerektiğinden

$$Min \sum_{i=1}^{n}\left|Y_i - \sum_{j=1}^{p} X_{ij}\beta_j\right| \tag{19}$$

yazılabilir (Eminkahyagil, 1997).

4.2 MINMAD Regresyonuna Doğrusal Programlama Yaklaşımı

Bir regresyon probleminde amaç tahmin edilen β değerlerinin en iyilenmesidir. β değerleri tahmin edilirken doğrusal programlama teknikleri kullanılabilir. d_i, i inci ölçüye ilişkin Y_i değişkeninin ölçülmüş ve kestirim değerleri arasındaki fark olmak üzere, β ile ilgili olarak $Min \sum\left|d_i\right|$ probleminde,

$$d_i = Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i) \tag{20}$$

olarak tanımlanır. Bu problem, ortalama mutlak sapmaların minimizasyonu problemi olarak bilinir. Bu durumda, β ya göre $\sum\left|d_i\right|$ nin minimizasyonu problemi,

$$\begin{aligned} &Min \sum\left|d_i\right| \\ &X\beta + d = Y \\ &d,\ \beta \ \textit{işareti belirtilmemiş} \end{aligned} \tag{21}$$

biçiminde ifade edilebilir (Arthanari and Dodge, 1993).

(21) probleminin çözülebilmesi için d ve β 'nın işaretinin belirli hale getirilmesi gerekir. İşareti belirtilmemiş herhangi bir θ_j değişkeni, $\theta'_j,\ \theta''_j \geq 0$ olmak üzere $\theta_j = \theta'_j - \theta''_j$ biçiminde iki değişkenin farkı olarak işareti belirli hale getirilebilir.

$d_{2j-1},\ d_{2j} \geq 0$, olmak üzere $d_i = d_{2j-1} - d_{2j}$, $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ alınarak d_i 'nin işareti belirli hale getirilebilir. Ayrıca $|d_i| = d_{2j-1} + d_{2j}$ ile problem yeniden

$$
\begin{aligned}
& Min\left(\sum d_{2j-1} + \sum d_{2j}\right) \\
& X\beta + d_{2j-1} - d_{2j} = Y \\
& \beta \ \textit{işareti belirtilmemiş} \\
& d_{2j-1},\ d_{2j} \geq 0
\end{aligned}
\tag{22}
$$

şeklinde ifade edilebilir (Arthanari and Dodge, 1993). Burada, X bilinen sabitler matrisi; Y bağımlı değişken vektörü; β bilinmeyenler vektörü; d_{2j-1} ve d_{2j} j inci ölçü için sırayla negatif ve pozitif sapmadır.

(22) bağıntılarında $X\beta + d_{2j-1} - d_{2j} = Y$ genel eşitliği ile verilen regresyon denklemi,

$$
\begin{aligned}
& \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{12} + \ldots + d_1 - d_2 && = Y_1 \\
& \vdots && \vdots \\
& \beta_0 + \beta_1 x_{n1} + \beta_2 x_{n2} + \ldots + \quad d_{2j-1} - d_{2j} && = Y_n \\
& \beta_i \textit{'lerin işareti belirtilmemiş}
\end{aligned}
\tag{23}
$$

açık biçimde yazılabilir. Burada $u_{2i-1},\ u_{2i} \geq 0,\ (i = 1, 2, \ldots, p)$ (p: bilinmeyen sayısı) olmak üzere

$$
\beta_{i-1} = u_{2i-1} - u_{2i} \tag{24}
$$

biçiminde β_i'lerin işareti belirli hale getirilebilir. (23) bağıntılarında sağ yan "=" biçiminde olduğundan (13c) bağıntısı gereği (22) problemindeki $Min Z = \sum d_{2j-1} + \sum d_{2j}$ erişim fonksiyonunda tüm sapma değişkenleri yer alacaktır. Bu durumda (23) bağıntılarında (24) bağıntısının dikkate alınmasıyla (22) problemi

$$
\begin{aligned}
& Min Z = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + \ldots + d_{2j-1} + d_{2j} \\
& (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4)x_{11} + (u_5 - u_6)x_{12} + \ldots + d_1 - d_2 && = Y_1 \\
& \vdots && \vdots \\
& (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4)x_{n1} + (u_5 - u_6)x_{n2} + \ldots + \quad d_{2j-1} - d_{2j} && = Y_n \\
& d_{2j-1},\ d_{2j} \geq 0,\quad (j = 1, 2, \ldots, n);\quad u_{2i-1},\ u_{2i} \geq 0,\quad (i = 1, 2, \ldots, p)
\end{aligned}
\tag{25}
$$

yapısını alır (Şimşek, 2008). Bu problemin çözümü sonucunda bulunan $u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots$ yardımıyla (24) bağıntısından β 'lar hesaplanarak regresyon denklemi yazılabilir.

4.3 En Küçük Karelerle Dengeleme Probleminin Normal Denklemlerinin Hedef Programlama Problemi Olarak Modellenmesi

Normal denklemler (7) bağıntısıyla verilmektedir. Bu denklem sistemindeki her bir denklem gerçekleşmesi beklenen birer hedef olup sağ yan tarafı "=" biçimindedir. Bu nedenle, (13c) bağıntısı gereği her bir denklemden negatif (d_i^-) ve pozitif (d_i^+) sapma değerlerinin her ikisinin birlikte minimum yapılması amaçlanabilir.

Dengeleme probleminde bilinmeyenlerin tahmininde doğrusal programlama yöntemleri kullanılabilir. Bu nedenle dengelemenin bilinmeyenler vektörü ($\bar{x}$), regresyondaki bilinmeyen katsayılar vektörü olan β 'ya karşılık geldiği düşünülerek Bölüm 4.2'deki MINMAD regresyonu için kullanılan doğrusal programlama yaklaşımı dengelemenin normal denklemlerinin çözümü için de uygulanabilir. (21) problemine yapılan işlemlere benzer işlemler (7) bağıntısıyla verilen normal denklemlere de uygulanabilir. Bu durumda, küçültülmüş bilinmeyenler vektörü genel olarak $Z=[dz_1 \;\; dz_2 \;\; dz_3 \;\; \cdots \;\; dz_m]^T$ şeklinde yeniden tanımlanıp normal denklemlerin açık biçimi için

$$
\begin{aligned}
& Min \sum \left| d_i \right| \\
& [Paa]\, dz_1 + [Pab]\, dz_2 + [Pac]\, dz_3 + \cdots + [Pam] dz_m + d = [Pal] \\
& \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
& [Pam]\, dz_1 + [Pbm]\, dz_2 + [Pcm]\, dz_3 + \cdots + [Pmm] dz_m + d = [Pml] \\
& \quad dz_1,\, dz_2,\, dz_3, \ldots, dz_m,\; d \quad \textit{işareti belirtilmemiş}
\end{aligned}
\tag{26}
$$

yazılabilir (Şimşek, 2008). Çözüm için, $d_{2j-1},\, d_{2j} \geq 0,\; (j=1,2,\ldots,m)$ olmak üzere d'nin işareti ve $u_{2i-1},\, u_{2i} \geq 0,\; (i=1,2,\ldots,m)$ olmak üzere

$$
dz_i = u_{2i-1} - u_{2i} \tag{27}
$$

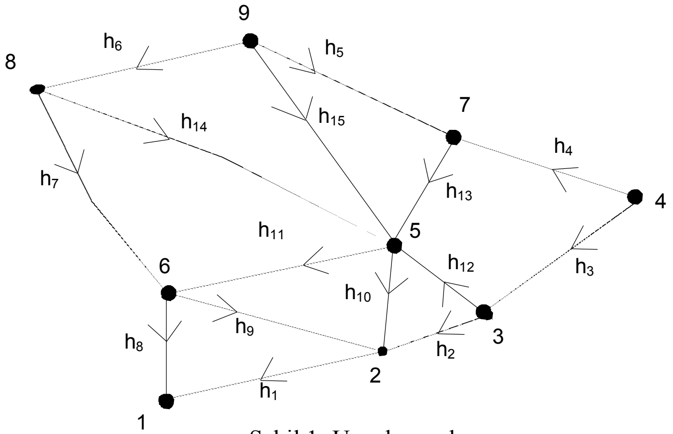
biçiminde bilinmeyenlerin işareti belirli hale getirilebilir. Bu durumda (26) bağıntılarıyla verilen problem

$$
\begin{aligned}
& Min\, Z = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + \cdots + d_{2j-1} + d_{2j} \\
& [Paa](u_1 - u_2) + [Pab](u_3 - u_4) + \cdots + [Pam](u_{2i-1} - u_{2i}) + d_1 - d_2 = [Pal] \\
& \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
& [Pam](u_1 - u_2) + [Pbm](u_3 - u_4) + \cdots + [Pmm](u_{2i-1} - u_{2i}) + d_{2j-1} - d_{2j} = [Pml] \\
& u_{2i-1},\; u_{2i} \geq 0 \quad ve \quad d_{2j-1},\; d_{2j} \geq 0, \qquad (i, j = 1,2,\ldots,m)
\end{aligned}
\tag{28}
$$

biçimini alır. Burada d_1 ve d_2 birinci normal denklemden; d_{2j-1} ve d_{2j} m'inci normal denklemden sırayla negatif ve pozitif yöndeki sapmayı ifade etmektedir. (28) bağıntıları ile, en küçük karelerle dengeleme probleminin normal denklemleri hedef programlama problemi olarak modellenmiş olmaktadır. Bu problemin çözümü sonucunda bulunacak u bilinmeyenleri yardımıyla (27) bağıntısından $dz_1, dz_2, \ldots, dz_m$ küçültülmüş dengeleme bilinmeyenleri elde edilir (Şimşek, 2008).

5. SAYISAL UYGULAMA

Uygulama amacıyla, Şekil 1'de görülen nivelman ağına ilişkin ölçüler Çizelge 1'de verilmiştir. Ağda 9 numaralı noktanın yüksekliği $H_9 = 72.658\ m$ olarak bilinmekte olup diğer noktaların yüksekliklerinin dengeli olarak bulunması istenmektedir.



Şekil 1: Uygulama alanı

Çizelge 1: Ölçüler

Ölçü No	Ölçü: h (m)	Yol: S (km)
1	18.156	0.444
2	46.789	0.237
3	44.978	0.540
4	19.568	0.362
5	13.893	0.543
6	1.772	0.479
7	60.404	0.658
8	42.090	0.297
9	23.929	0.462
10	33.434	0.322
11	9.502	0.504
12	13.360	0.256
13	38.775	0.288
14	50.898	0.746
15	52.668	0.698

5.1 En Küçük Kareler Yöntemine Göre Dengeleme

Dengeleme işlemine başlamadan önce bilinmeyen nokta yükseklikleri $H_1 = Z_1$, $H_2 = Z_2$, $H_3 = Z_3$, $H_4 = Z_4$, $H_5 = Z_5$, $H_6 = Z_6$, $H_7 = Z_7$, $H_8 = Z_8$ biçiminde seçilmiş ve noktaların yaklaşık yükseklikleri (Z^0)hesaplanarak aşağıda verilmiştir.

Nokta No	Yaklaşık Yükseklik (*m*)	Nokta No	Yaklaşık Yükseklik (*m*)
1	176.920	5	125.330
2	158.764	6	134.830
3	111.975	7	86.565
4	66.997	8	74.426

(1) bağıntısı yardımıyla ilk düzeltme denklemleri,

$$\begin{aligned}
h_1 + V_1 &= Z_1 - Z_2 \\
h_2 + V_2 &= Z_2 - Z_3 \\
h_3 + V_3 &= Z_3 - Z_4 \\
h_4 + V_4 &= Z_7 - Z_4 \\
h_5 + V_5 &= Z_7 - H_9 \\
h_6 + V_6 &= Z_8 - H_9 \\
&\vdots \\
h_{15} + V_{15} &= Z_5 - H_9
\end{aligned} \tag{29}$$

biçiminde kurulabilir. (3) bağıntısının (29) bağıntılarında dikkate alınmasıyla düzeltme denklemleri,

$$\begin{array}{lcccccccccl}
 & & & & & & & & & & \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{-l} \\
V_1 = & dz_1 & -dz_2 & & & & & & & & -h_1 + Z_1^0 - Z_2^0 \\
V_2 = & & dz_2 & -dz_3 & & & & & & & -h_2 + Z_2^0 - Z_3^0 \\
V_3 = & & & dz_3 & -dz_4 & & & & & & -h_3 + Z_3^0 - Z_4^0 \\
V_4 = & & & & -dz_4 & & & dz_7 & & & -h_4 + Z_7^0 - Z_4^0 \\
V_5 = & & & & & & & dz_7 & & & -h_5 + Z_7^0 - H_9 \\
V_6 = & & & & & & & & dz_8 & & -h_6 + Z_8^0 - H_9 \\
V_7 = & & & & & & dz_6 & & -dz_8 & & -h_7 + Z_6^0 - Z_8^0 \\
V_8 = & dz_1 & & & & & -dz_6 & & & & -h_8 + Z_1^0 - Z_6^0 \\
V_9 = & & dz_2 & & & & -dz_6 & & & & -h_9 + Z_2^0 - Z_6^0 \\
V_{10} = & & dz_2 & & & -dz_5 & & & & & -h_{10} + Z_2^0 - Z_5^0 \\
V_{11} = & & & & & -dz_5 & +dz_6 & & & & -h_{11} + Z_6^0 - Z_5^0 \\
V_{12} = & & & -dz_3 & & +dz_5 & & & & & -h_{12} + Z_5^0 - Z_3^0 \\
V_{13} = & & & & & dz_5 & & -dz_7 & & & -h_{13} + Z_5^0 - Z_7^0 \\
V_{14} = & & & & & dz_5 & & & -dz_8 & & -h_{14} + Z_5^0 - Z_8^0 \\
V_{15} = & & & & & dz_5 & & & & & -h_{15} + Z_5^0 - H_9
\end{array} \tag{30}$$

biçimini alır. Buradan

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad l=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -14 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \\ 10 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix} 2.25 \\ 4.22 \\ 1.85 \\ 2.76 \\ 1.84 \\ 2.09 \\ 1.52 \\ 3.37 \\ 2.16 \\ 3.11 \\ 1.98 \\ 3.91 \\ 3.47 \\ 1.34 \\ 1.43 \end{bmatrix} \qquad (31)$$

biçiminde matris ve vektörler elde edilebilir. Ayrıca (6) bağıntısına göre hesaplanacak normal denklemler matrisi (N) ve yalın terimler vektörü (n),

$$N=\begin{bmatrix} 5.62 & -2.25 & 0 & 0 & 0 & -3.37 & 0 & 0 \\ -2.25 & 11.74 & -4.22 & 0 & -3.11 & -2.16 & 0 & 0 \\ 0 & -4.22 & 9.98 & -1.85 & -3.91 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.85 & 4.61 & 0 & 0 & -2.76 & 0 \\ 0 & -3.11 & -3.91 & 0 & 15.24 & -1.98 & -3.47 & -1.34 \\ -3.37 & -2.16 & 0 & 0 & -1.98 & 9.03 & 0 & -1.52 \\ 0 & 0 & 0 & -2.76 & -3.47 & 0 & 8.07 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.34 & -1.52 & 0 & 4.95 \end{bmatrix},\quad n=\begin{bmatrix} 0 \\ -10.80 \\ -19.55 \\ 0 \\ 36.53 \\ 14.76 \\ -60.46 \\ 16.40 \end{bmatrix} \qquad (32)$$

olur. Bu normal denklemler (8) bağıntısına göre çözülerek dengeleme bilinmeyenleri mm biriminde

$$Z=\begin{bmatrix} dz_1 & dz_2 & dz_3 & dz_4 & dz_5 & dz_6 & dz_7 & dz_8 \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} -2.6 & -5.1 & -7.3 & -10.4 & -3.3 & -0.9 & -12.5 & 2.1 \end{bmatrix}^T \qquad (33)$$

ve (5) bağıntısından düzeltmeler vektörü mm biriminde

$$V=\begin{bmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 & V_7 & V_8 & V_9 & V_{10} & V_{11} & V_{12} & V_{13} & V_{14} & V_{15} \end{bmatrix}^T=$$
$$\begin{bmatrix} 2.5 & 2.2 & 3.1 & -2.1 & 1.5 & -1.9 & -3.0 & -1.7 & 0.8 & -1.8 & 0.4 & -1.0 & -0.8 & 0.6 & 0.7 \end{bmatrix}^T$$
(34)

olarak elde edilmiştir. (9) bağıntısı yardımıyla dengeli ölçüler m biriminde

$$\hat{L}^T=\begin{bmatrix} L+V \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} 18.1585 & 46.7912 & 44.9811 & 19.5659 & 13.8945 & 1.7701 & 60.4010 \\ 42.0883 & 23.9298 & 33.4322 & 9.5024 & 13.3590 & 38.7742 & 50.8986 & 52.6687 \end{bmatrix}^T \qquad (35)$$

ve (3) bağıntısı yardımıyla noktaların dengeli yükseklikleri m biriminde

Nokta No	Yükseklik (H)	Nokta No	Yükseklik (H)
1	176. 9174	5	125.3267
2	158.7589	6	134.8291
3	111.9677	7	86.5525
4	66.9866	8	74.4281

(36)

olarak hesaplanmıştır. Düzeltmeler bulunduktan sonra

$$V^T P V=118.5946 \quad mm^2 \qquad (37)$$

ve (10) bağıntısından sonsal standart sapma

$$\hat{\sigma}=[(V^{T}PV)/(n-u)]^{1/2}=118.5946/(15-8)=\pm 4.1\,mm \tag{38}$$

bulunmuştur.

5.2 Dengeleme Probleminin Hedef Programlama ile Çözümü

En küçük karelerle dengelemenin normal denklemlerinin her biri, gerçekleşmesi arzulanan bir hedef olarak düşünülebileceğinden (32) bağıntısı ile verilen normal denklemler (28) bağıntıları yardımıyla

$$
\begin{aligned}
&MinZ= d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d_7 + d_8 + d_9 + d_{10} + d_{11} + d_{12} + d_{13} + d_{14} + d_{15} + d_{16}\\
&5.62(u_1-u_2) - 2.25\ (u_3-u_4) + \ldots + 0\ (u_9-u_{10}) -3.37\ (u_{11}-u_{12}) + 0\ (u_{13}-u_{14}) +0\ (u_{15}-u_{16}) + d_1 - d_2 = 0\\
&-2.25(u_1-u_2) +11.74(u_3-u_4) + \ldots - 3.11\ (u_9-u_{10}) - 2.16\ (u_{11}-u_{12}) + 0\ (u_{13}-u_{14}) + 0\ (u_{15}-u_{16}) + d_3 - d_4 = -10.80\\
&0\ (u_1-u_2) - 4.22\ (u_3-u_4) + \ldots - 3.91\ (u_9-u_{10}) + 0\ (u_{11}-u_{12}) + 0\ (u_{13}-u_{14}) + 0\ (u_{15}-u_{16}) + d_5 - d_6 = -19.55\\
&0\ (u_1-u_2) + 0\ (u_3-u_4) + \ldots + 0\ (u_9-u_{10}) + 0\ (u_{11}-u_{12}) - 2.76\ (u_{13}-u_{14}) + 0\ (u_{15}-u_{16}) + d_7 - d_8 = 0\\
&0\ (u_1-u_2) - 3.11\ (u_3-u_4) + \ldots + 15.24(u_9-u_{10}) - 1.98(u_{11}-u_{12}) - 3.47\ (u_{13}-u_{14}) - 1.34\ (u_{15}-u_{16}) + d_9 - d_{10} = 36.53\\
&-3.37(u_1-u_2) -2.16\ (u_3-u_4) + \ldots - 1.98\ (u_9-u_{10}) + 9.03(u_{11}-u_{12}) + 0\ (u_{13}-u_{14}) - 1.52\ (u_{15}-u_{16}) + d_{11} - d_{12} = 14.76\\
&0\ (u_1-u_2) + 0\ (u_3-u_4) + \ldots - 3.47\ (u_9-u_{10}) + 0\ (u_{11}-u_{12}) + 8.07(u_{13}-u_{14}) + 0\ (u_{15}-u_{16}) + d_{13} - d_{14} = -60.46\\
&0\ (u_1-u_2) + 0\ (u_3-u_4) + \ldots - 1.34\ (u_9-u_{10}) - 1.52(u_{11}-u_{12}) + 0\ (u_{13}-u_{14}) + 4.95(u_{15}-u_{16}) + d_{15} - d_{16} = 16.40\\
&u_{2i-1},\ u_{2i} \geq 0 \quad ve \quad d_{2j-1},\ d_{2j} \geq 0, \quad (i, j=1,2,\ldots,8)
\end{aligned} \tag{39}
$$

biçiminde hedef programlama problemi olarak ifade edilebilir. Bu problemin çözümünün sonucunda

$$
\begin{aligned}
&u_1 = 0,\ u_2 = 2.6,\ u_3 = 0,\ u_4 = 5.1,\ u_5 = 0,\ u_6 = 7.3,\ u_7 = 0,\ u_8 = 10.4,\\
&u_9 = 0,\ u_{10} = 3.3,\ u_{11} = 0,\ u_{12} = 0.9,\ u_{13} = 0,\ u_{14} = 12.5,\ u_{15} = 2.1,\ u_{16} = 0,\\
&d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = d_7 = d_8 = d_9 = d_{10} = d_{11} = d_{12} = d_{13} = d_{14} = d_{15} = d_{16} = 0
\end{aligned} \tag{40}
$$

olarak hesaplanmıştır. Hesaplanan bu büyüklükler ve (27) bağıntısı yardımıyla bilinmeyenler mm biriminde

$$Z=\begin{bmatrix} dz_1 & dz_2 & dz_3 & dz_4 & dz_5 & dz_6 & dz_7 & dz_8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2.6 & -5.1 & -7.3 & -10.4 & -3.3 & -0.9 & -12.5 & 2.1 \end{bmatrix}^T \tag{41}$$

olarak elde edilmiştir. d_{2j-1}, d_{2j} $(j= 1,2,\ldots,8)$ biçimindeki sapma değişkenlerinin hepsinin sıfır çıkması, hedef olarak ön görülen her bir normal denklemden pozitif ve negatif yönde hiçbir sapma olmadığını göstermektedir. Küçültülmüş bilinmeyenler hesaplandıktan sonra düzeltmeler, dengeli ölçüler ve noktalarının dengeli yükseklikleri hesaplanmış ve sırayla (34), (35) ve (36) eşitlikleriyle verilen değerler bulunmuştur.

5.3 Sonuç

Uygulamada, nivelman ağı önce en küçük kareler yöntemiyle dengelenmiş ve hesap sonuçları (33)-(38) eşitlikleriyle verilmiştir.

Çalışmada, normal denklemlerin hedef programlama problemi şeklinde modellenerek çözümü amaçlandığından (32) eşitliği ile verilen normal denklemler (39) bağıntıları ile hedef programlama problemi olarak ifade edilerek bilinmeyenler $(u_1, u_2, \ldots, u_{15}, u_{16})$ ve hedef olarak ön görülen normal denklemlerden negatif ve pozitif sapmalar $(d_1, d_2, \ldots, d_{15}, d_{16})$ bulunmuş ve (40) eşitliği ile verilmiştir. Hesaplanan bu bilinmeyenler (27) bağıntısında kullanılarak küçültülmüş dengeleme bilinmeyenleri elde edilmiş ve (41) eşitliği ile verilmiştir. Daha sonra dengelemeden beklenen diğer büyüklükler hesaplanmıştır.

Yapılan uygulama ile aşağıdaki sonuçlara varılmıştır:

- Farklı iki yöntemin sonucunda elde edilen (33) ve (41) eşitlikleri incelendiğinde bilinmeyenlerin aynı büyüklükler olduğu görülmektedir. Böylece, çalışmadan amaçlanan en küçük kareler yöntemiyle dengelemenin normal denklemlerinin hedef programlama problemi olarak çözümü gerçekleşmiş olmaktadır.

- Bilinmeyenler elde edildikten sonra, düzeltmeler (V_i), dengeli ölçüler $(\hat{L}_i)$, ağ noktalarının dengeli yükseklikleri (H_i) ve sonsal standart sapma $(\hat{\sigma})$ hesaplanabilmektedir. Böylece istenilen sonuçların elde edilebileceği görülmüş olup MINMAD kestiricileri ile, dengelemenin normal denklemlerinin çözümüne alternatif bir çözüm yöntemi elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

Aksoy, A., 1981. En Küçük Kareler İlkesine Göre Dengeleme Hesabı, Harita Yük. Tek. Okulu Ders Notları, 324 s.

Arthanari T.S., Dodge Y., 1993. Mathematical Programming in Statistics, John Wileyl&Sons, 413 p.

Demirel H., 1987. Nirengi Ağlarının Dengelenmesi ve Sonuçlarının Test Edilmesi, Harita Dergisi, Sayı: 98, s.1-18.

Eminkahyagil G., 1997. Hedef Programlama ve Bir Uygulama. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Gülenç İ.F., Karabulut B., 2005. Doğrusal Hedef Programlama İle Bir Üretim Planlama Probleminin Çözümü, Kocaeli Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, Sayı:9, 2005/1, s.55-68.

Ignizio J.P., 1982. Linear Programming in Single-&Multiple-Objective Systems, Prencitice-Hall, Inc., 506 p.

Ignizio J.P., 1989. Introduction to Linear Goal Programming (Second Printing), SAGE Publications, Inc., 96 p.

Öztürk A., 2004. Yöneylem Araştırması, Ekin Kitabevi, 729 s.

Öztürk E., Şerbetçi, M., 1989. Dengeleme Hesabı, Cilt II, Karadeniz Teknik Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Genel Yayın No:144, Fakülte Yayın No:40. Karadeniz Teknik Üniversitesi Basımevi, 371 s.

Şimşek M., 1988. Nirengi Ağlarında Sıklaştırma Modelleri ve İstatistik Testler, Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Şimşek M., 1992. Jeodezik Ağlarda Uyuşumsuz Ölçülerin Belirlenmesi. Harita Dergisi, Sayı:108, s. 18-33.

Şimşek M., 1995. Uydu Tekniklerinin Ağ Sıklaştırmasında Kullanılabilirliği Üzerine Bir Araştırma, Doktora Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Şimşek M., 1997a. Nirengi Ağlarının Yersel Ölçülerle Dengelenmesi İçin Program Tasarımı ve Bir Örnek, Harita ve Kadastro Mühendisliği, Sayı: 82, s.51-66.

Şimşek M., 1997b. Kondisyonu Bozuk Normal Denklemler Matrisinin Kondisyonunun Düzeltilmesi ve Dengeleme Sonuçlarındaki Etkileri, Harita ve Kadastro Mühendisliği, Sayı: 82, s.103-117.

Şimşek M., 2008. Jeodezik Ağların Dengelenmesinde Hedef Programlama Tekniği. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Turanlı M., Köse A., 2005. Doğrusal Hedef Programlama Yöntemi ile Türkiye'deki Sigorta Şirketlerinin Performanslarının Değerlendirilmesi, İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, Sayı: 7, s.19-39.

Ulsoy, E., 1974. Dengeleme Hesabı (En küçük kareler metodu), Genişletilmiş İkinci Baskı, İstanbul Devlet Mühendislik ve Mimarlık Akademisi Yayınları, Sayı:87. İnkılap ve Aka Basımevi, 486 s.

Ulsoy E., 1980. Pratik Matris Hesabı ve Dengeleme Hesabına Uygulanması, İstanbul Devlet Mühendislik ve Mimarlık Akademisi Yayınları, Sayı:91. Özarkadaş Matbaası, 149 s.

Wolf H., 1975. Ausgleichungsrechnung, Formeln zur Praktischen Anwendung, Ferd. Dümmlers Verlag, 323 s.

Wolf H., 1979. Ausgleichungsrechnung II, Aufgaben und Beispiele zur Praktischen Anwendung, Ferd. Dümmlers Verlag, 353 s.